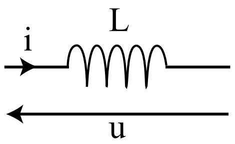
Circuits linéaires en régime transitoire

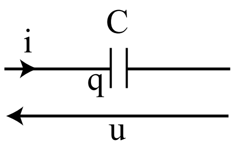
1 Conditions initiales et continuité

On va étudier ce qui se passe entre entre deux régimes continus = régime transitoire. Les grandeurs électriques ne sont plus constantes. Rappelons les conventions et résultats pour la bobine et le condensateur :



$$\boxed{u = L\frac{di}{dt}}$$

L inductance en henry (H).



$$\boxed{q = Cu \quad i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}}$$

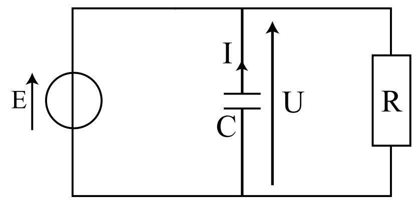
C capacité en farad (F).

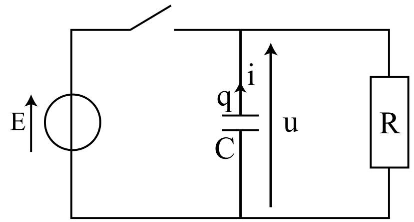
Les circuits étant linéaires, toute grandeur électrique $x(t)$ est décrite par une équation différentielle linéaire à coefficient constant.
On détermine les constantes d'intégration grâce aux conditions initiales en utilisant :

- la continuité de la tension aux bornes du condensateur (sinon $i = C\frac{du}{dt}$ tendrait vers l'infini ce qui est physiquement impossible) ;
- la continuité de l'intensité du courant dans la bobine (sinon $u = L\frac{di}{dt}$ tendrait vers l'infini ce qui est physiquement impossible).

2 Régime libre du circuit RC

2.1 Évolution de la tension aux bornes du condensateur





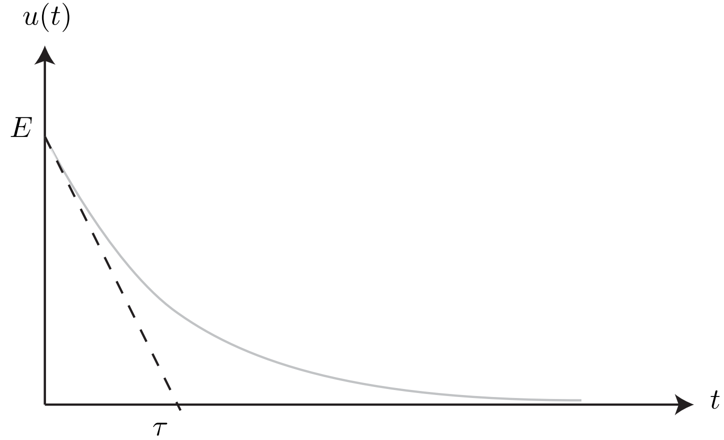
Le condensateur est initialement chargé sous une tension E. En régime continu, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert $U = E$ et $I = 0$ (E/R dans la résistance).
A $t = 0$, on ouvre l'interrupteur, le condensateur se décharge dans la résistance :

$$u = Ri = -R\frac{dq}{dt} = -RC\frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

La solution est de la forme $u(t) = A\exp(-t/\tau)$.
$u(0) = A = E$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur.
Finalement

$$\boxed{u(t) = E\exp(-t/\tau)}$$



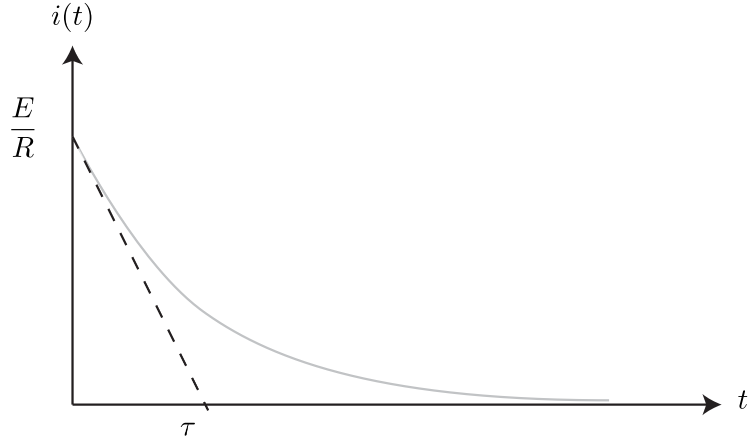
$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{E}{\tau}$$

La tangente à l'origine d'équation $-\dfrac{E}{\tau}t + E$ coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$.
D'autre part :
pour $t = \tau$, $u = E\exp(-1) = 0,37E$
pour $t = 2\tau$, $u = E\exp(-1) = 0,14E$
pour $t = 3\tau$, $u = E\exp(-1) = 0,05E$

2.2 Évolution de l'intensité du courant

$i = -\dfrac{dq}{dt} = -C\dfrac{du}{dt}$, ce qui donne

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp(-t/\tau)}$$



Le condensateur assure la continuité de la tension à ses bornes mais pas celle de l'intensité du courant.

2.3 Étude énergétique

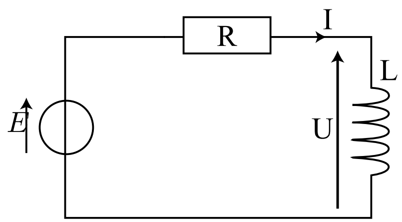
Calculons l'énergie reçue (on est bien en convention récepteur pour la résistance) et dissipée par effet Joule dans la résistance :

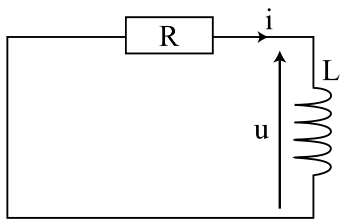
$$W = \int \mathcal{P}dt = \int uidt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty \exp(-2t/\tau)dt = \frac{E^2}{R}\left[\frac{\exp(-2t/\tau)}{-2/\tau}\right]_0^\infty$$

$W = \dfrac{1}{2}CE^2$ énergie emmagasinée dans le condensateur.

3 Régime libre du circuit RL

3.1 Évolution de l'intensité du courant





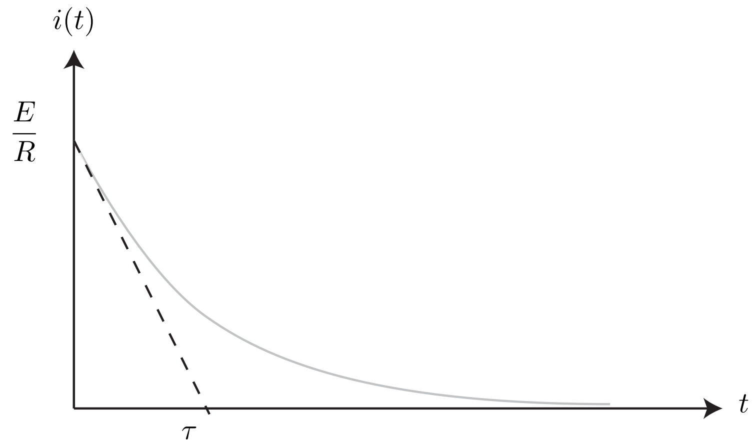
En régime continu, la bobine se comporte comme un interrupteur fermé $U = 0$ et $I = E/R$.
A $t = 0$, on supprime E :

$$u = L\frac{di}{dt} = -Ri$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = L/R$$

La solution est de la forme $i(t) = A\exp(-t/\tau)$.
$i(0) = A = E/R$ par continuité de l'intensité du courant dans la bobine.
Finalement

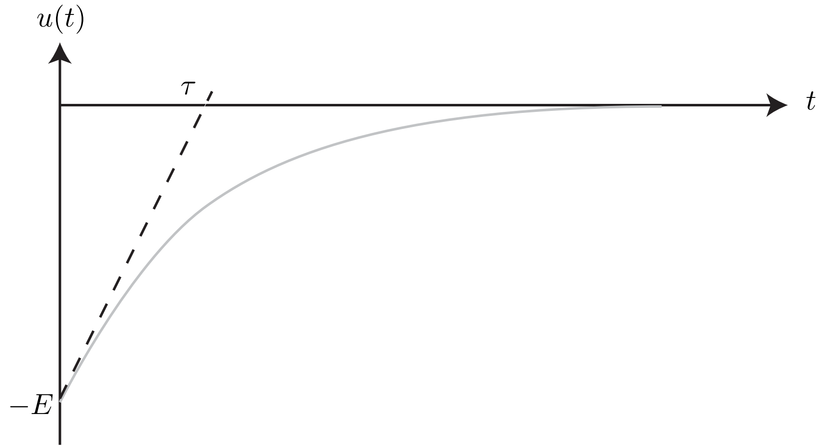
$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp(-t/\tau)}$$



3.2 Évolution de la tension aux bornes de la bobine

$u = L\dfrac{di}{dt}$, ce qui donne

$$\boxed{u(t) = -E\exp(-t/\tau)}$$



3.3 Étude énergétique

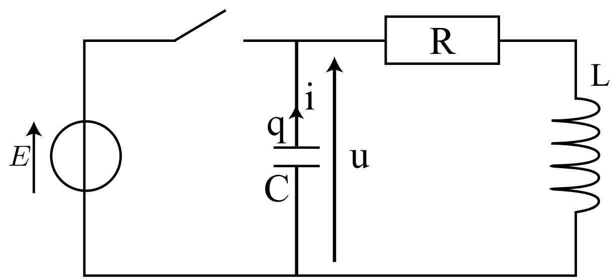
Calculons l'énergie reçue (on est en convention générateur pour la résistance) et dissipée par effet Joule dans la résistance :

$$W = \int \mathcal{P}dt = \int -uidt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty \exp(-2t/\tau)dt = \frac{E^2}{R}\left[\frac{\exp(-2t/\tau)}{-2/\tau}\right]_0^\infty$$

$W = \dfrac{1}{2}\dfrac{E^2}{R}\dfrac{L}{R} = \dfrac{1}{2}LI^2$ énergie emmagasinée dans la bobine.

4 Régime libre du circuit RLC série

4.1 Équation différentielle



$$(1) \quad u = Ri + L\frac{di}{dt}$$

avec $u = q/C$ et $i = -\frac{dq}{dt}$ donne $\frac{q}{C} = -R\frac{dq}{dt} - L\frac{d^2q}{dt^2}$ soit

$$(2) \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Avec $q = Cu$, (2) donne

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$$

En dérivant (1) et en utilisant $u = q/C$ et $i = -\frac{dq}{dt}$, on obtient

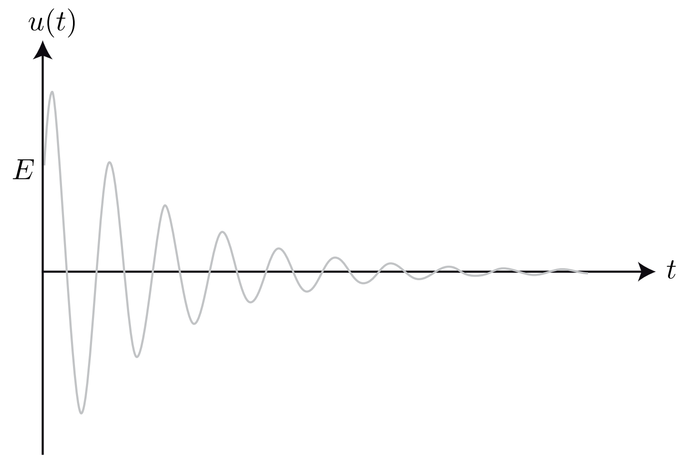
$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

4.2 Différents régimes

régime	$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$ $2\alpha = \frac{R}{L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$
$Q > \frac{1}{2}$ pseudo-périodique	$u = \mathrm{e}^{-\alpha t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$ $\Omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$
$Q < \frac{1}{2}$ apériodique	$u = \mathrm{e}^{-\alpha t}(A'\mathrm{e}^{\Omega' t} + B'\mathrm{e}^{-\Omega' t})$ $\Omega'^2 = \alpha^2 - \omega_0^2$
$Q = \frac{1}{2}$ critique	$u = \mathrm{e}^{-\omega_0 t}(A''t + B'')$

Q s'appelle le facteur de qualité.

On détermine les constantes grâce aux conditions initiales en utilisant la continuité de la tension aux bornes du condensateur et la continuité de l'intensité du courant dans la bobine.



La pseudo-période est égale à $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

4.3 Étude énergétique

En multipliant (1) par i, on obtient

$$ui = Ri^2 + L\frac{di}{dt}i$$

comme $i = -\frac{dq}{dt}$ et $q = Cu$, on a

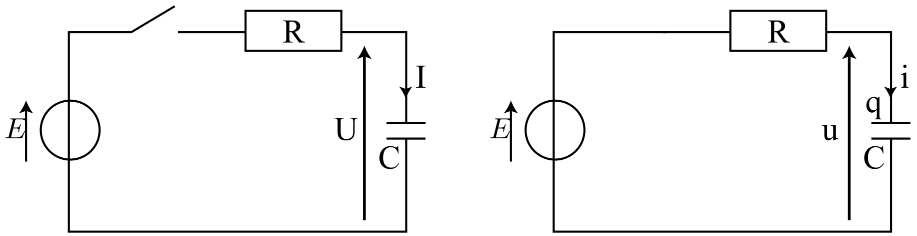
$$-Cu\frac{du}{dt} = Ri^2 + L\frac{di}{dt}i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) = -Ri^2$$

L'énergie emmagasinée dans le condensateur et la bobine à un instant t, $W(t) = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$, diminue au cours du temps, elle est dissipée par effet Joule dans la résistance.

5 Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension

5.1 Évolution de la tension aux bornes du condensateur



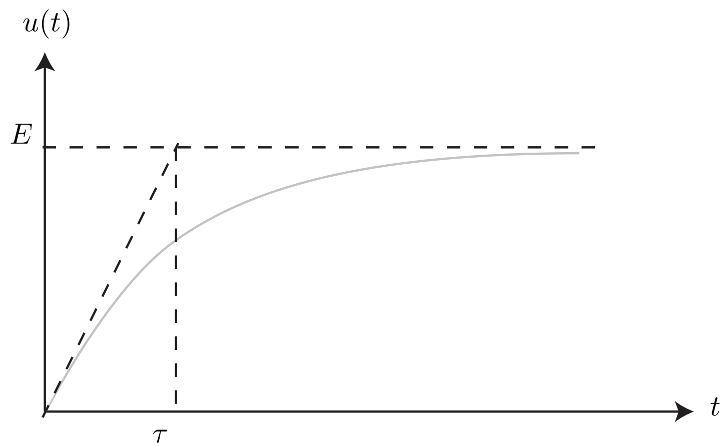
Le condensateur est initialement déchargé (Régime continu $U = 0$ et $I = 0$).
A $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur se charge :

$$E = Ri + u = RC\frac{du}{dt} + u$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

La solution est de la forme $u(t) = u^{(h)} + u^{(p)} = A\exp(-t/\tau)$+E.
$u(0) = A + E = 0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur.
Finalement

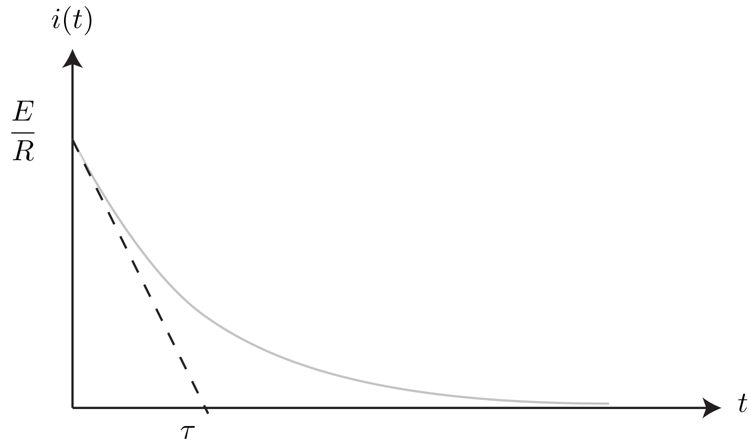
$$\boxed{u(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))}$$



5.2 Évolution de l'intensité du courant

$i = +\frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$ ce qui donne

$$\boxed{\frac{E}{R}\exp(-t/\tau)}$$



5.3 Bilan énergétique

Multiplier $E = Ri + u$ par i donne

$$Ei = Ri^2 + ui$$

où Ei est la puissance fournie par le générateur (E(-i) puissance reçue) ;
Ri^2 est la puissance reçue et dissipée dans la résistance ;
ui est la puissance reçue et emmagasinée dans le condensateur.

$$\int_0^\infty Eidt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty \exp(-t/\tau)dt = \frac{E^2}{R}RC = CE^2$$

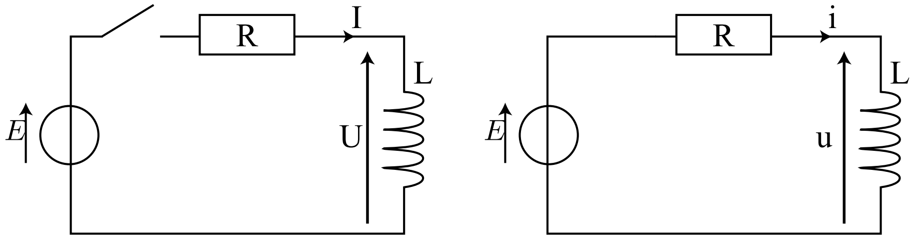
$$\int_0^\infty Ri^2dt = R\frac{E^2}{R^2}\int_0^\infty \exp(-2t/\tau)dt = R\frac{E^2}{R^2}\frac{RC}{2} = \frac{1}{2}CE^2$$

$$\int_0^\infty uidt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty (\exp(-t/\tau) - \exp(-2t/\tau))dt = \frac{E^2}{R}(RC - \frac{RC}{2}) = \frac{1}{2}CE^2$$

L'énergie fournie par le générateur se répartit équitablement entre la résistance et le condensateur.

6 Réponse d'un circuit RL à un échelon de tension

6.1 Évolution de l'intensité du courant



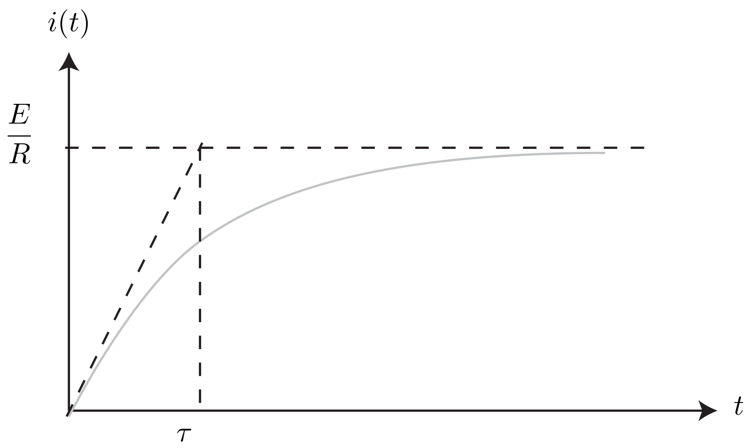
Régime continu $U = 0$ et $I = 0$.
A $t = 0$, on ferme l'interrupteur :

$$E = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L} \quad \text{avec} \quad \tau = L/R$$

La solution est de la forme $i(t) = i^{(h)} + i^{(p)} = A\exp(-t/\tau) + \dfrac{E}{R}$.
$i(0) = A + \dfrac{E}{R} = 0$ par continuité de l'intensité du courant dans la bobine.
Finalement

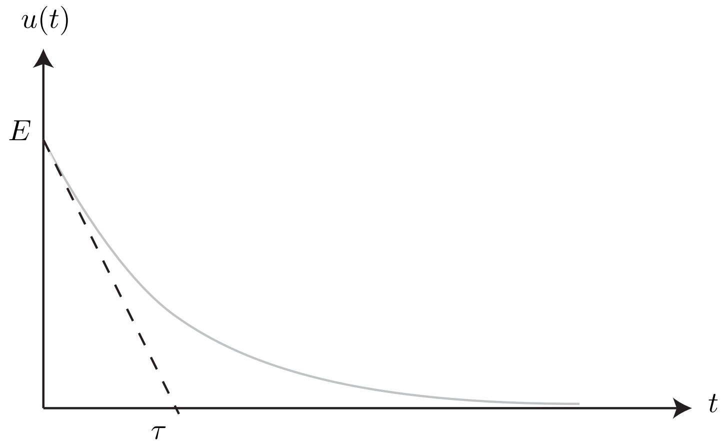
$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-t/\tau))}$$



6.2 Évolution de la tension aux bornes de la bobine

$u = L\dfrac{di}{dt}$ ce qui donne

$$\boxed{u(t) = E\exp(-t/\tau)}$$



6.3 Bilan énergétique

Multiplier $E = Ri + u$ par i donne

$$Ei = Ri^2 + ui$$

où Ei est la puissance fournie par le générateur (E(-i) puissance reçue) ;
Ri^2 est la puissance reçue et dissipée dans la résistance ;
ui est la puissance reçue et emmagasinée dans la bobine.
Quand $t \to \infty$ Un nouveau régime continu s'établit avec $I = E/R$ donc :

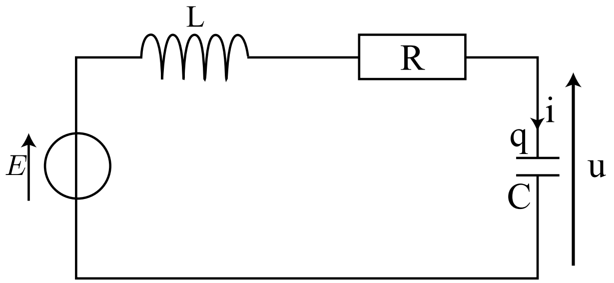
$$\int_0^\infty Eidt \to \infty$$

$$\int_0^\infty Ri^2dt \to \infty$$

$$\int_0^\infty uidt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty (\exp(-t/\tau) - \exp(-2t/\tau))dt = \frac{E^2}{R}(\frac{L}{R} - \frac{L}{2R}) = \frac{1}{2}LI^2$$

7 Réponse d'un circuit RLC série à un échelon de tension

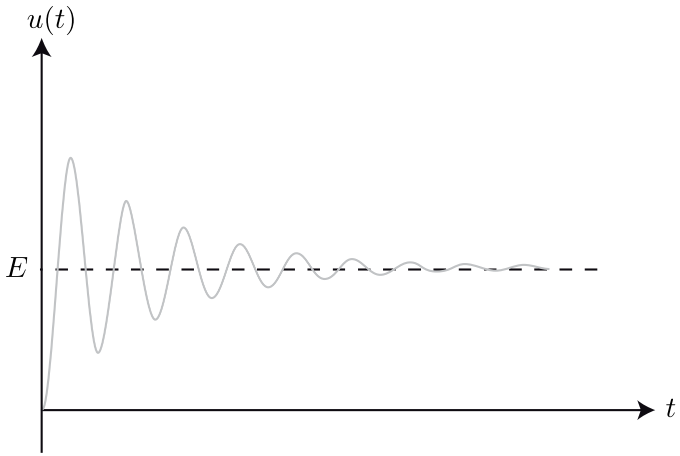
7.1 Tension aux bornes du condensateur



Le condensateur est initialement déchargé.
A $t = 0$, on ferme l'interrupteur :
$E = L\dfrac{di}{dt} + Ri + u$ soit

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{E}{L}$$

u et i vérifient la même équation.
La solution est de la forme $q(t) = q^{(h)} + q^{(p)}$.
Pour $q^{(h)}$ voir régime libre.
$q^{(p)} = CE$.
Par exemple en régime pseudo-périodique :



7.2 Bilan énergétique

Multiplier $E = L\dfrac{di}{dt} + Ri + u$ par i donne

$$Ei = L\frac{di}{dt}i + Ri^2 + C\frac{du}{dt}u$$

où Ei est la puissance fournie par le générateur (E(-i) puissance reçue) ;
$L\dfrac{di}{dt}i$ est la puissance reçue et emmagasinée dans la bobine ;
Ri^2 est la puissance reçue et dissipée dans la résistance ;
ui est la puissance reçue et emmagasinée dans le condensateur.
Quand $t \to \infty$ Un nouveau régime continu s'établit avec $U = E$ et $I = 0$ donc :

$$\int_0^\infty L\frac{di}{dt}idt = \left[\frac{1}{2}Li^2\right]_0^\infty = 0$$

$$\int_0^\infty C\frac{du}{dt}udt = \left[\frac{1}{2}Cu^2\right]_0^\infty = \frac{1}{2}CE^2$$

Pour les deux autres intégrales, il faut expliciter $u(t)$ et $i(t)$:

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) + E$$

comme $i(t) = C\dfrac{du}{dt}$, on a

$$i(t) = C\left(-\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) + \mathrm{e}^{-\alpha t}(-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t))\right)$$

$u(0) = A + E = 0 \Rightarrow A = -E$
$i(0) = C(-\alpha A + B\Omega) = 0 \Rightarrow B = \dfrac{-\alpha E}{\Omega}$ d'où

$$i(t) = CE\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\Omega t)\left(\frac{\alpha^2}{\Omega} + \Omega\right)$$

$$\int_0^\infty Eidt = CE^2$$

(voir calcul MAPLE) donc en utilisant le bilan, la dernière intégrale vaut

$$\int_0^\infty Ri^2dt = \frac{1}{2}CE^2$$

```
> restart;
> f:=t->exp(-alpha*t)*sin(omega*t);
```

$$f := t \to e^{(-\alpha\, t)} \sin(\omega\, t)$$

```
> int(f(t),t=0..infinity);
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> alpha
Will now try indefinite integration and then take limits.
```

$$\lim_{t \to \infty} -\frac{\omega\, e^{(-\alpha\, t)} \cos(\omega\, t) + \alpha\, e^{(-\alpha\, t)} \sin(\omega\, t) - \omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

```
>
```