Système formé de deux points matériels

Table des matières

Soit le système formé par deux points matériels M_1 de masse m_1, de vitesse $\mathbf{v}_1$, soumis à des forces de résultante $\mathbf{F}_1$ et M_2 de masse m_2, de vitesse $\mathbf{v}_2$, soumis à des forces de résultante $\mathbf{F}_2$. On notera m la somme $m_1 + m_2$

Par défaut, les vitesses et les accélérations sont calculées par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen

1 Éléments cinétiques

1.1 Éléments cinétiques dans $\mathcal{R}$

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

est la **quantité de mouvement totale** ou **résultante cinétique** du système dans $\mathcal{R}$

$$\mathbf{L}_O = \sum_i \mathbf{L}_{Oi} = \sum_i \mathbf{OM}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i = \mathbf{OM}_1 \wedge m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{OM}_2 \wedge m_2\mathbf{v}_2$$

est le **moment cinétique total** du système en O dans $\mathcal{R}$

$$E_c = \sum_i E_{ci} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

est l'**énergie cinétique totale** du système dans $\mathcal{R}$

1.2 Centre de masse

Le centre de masse du système (ou encore centre d'inertie, centre de gravité, barycentre) est le point G défini par

$$\boxed{(m_1 + m_2)\mathbf{OG} = m_1\mathbf{OM}_1 + m_2\mathbf{OM}_2}$$

O étant un point quelconque de $\mathcal{R}$; si $O = G$

$$m_1\mathbf{GM}_1 + m_2\mathbf{GM}_2 = 0$$

Choisissons un point O fixe dans $\mathcal{R}$

$$\boxed{\mathbf{v}_G = \frac{d\mathbf{OG}}{dt} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}}$$

est la vitesse du centre de masse G par rapport à $\mathcal{R}$

1.3 Référentiel barycentrique

Le référentiel barycentrique ou référentiel du centre de masse, noté $\mathcal{R}^*$, est le référentiel en translation par rapport à $\mathcal{R}$ dans lequel le centre de masse G est fixe (souvent pris comme origine de $\mathcal{R}^*$)

Attention : pour que $\mathcal{R}^*$ soit galiléen, il faut bien sûr que $\mathcal{R}$ soit galiléen mais aussi que $\mathbf{v}_G = \mathbf{cte}$

$\mathcal{R}^*$ étant en translation par rapport à $\mathcal{R}$, on peut dériver indifféremment par rapport à $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^*$, la composition des vitesses s'écrit

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}_e = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}_G$$

la composition des accélérations

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^* + \mathbf{a}_e = \mathbf{a}^* + \mathbf{a}_G$$

1.4 Éléments cinétiques dans $\mathcal{R}^*$

1.4.1 Quantité de mouvement totale

$$\mathbf{p}^* = \sum_i \mathbf{p_i}^* = \sum_i m_i \mathbf{v}_i^* = m_1 \mathbf{v}_1^* + m_2 \mathbf{v}_2^*$$

$$\mathbf{p}^* = m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_G) + m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_G) = 0$$

La quantité de mouvement totale du système dans $\mathcal{R}^*$ est nulle $\mathbf{p}^* = 0$

1.4.2 Moment cinétique total en G

$$\mathbf{L}_G^* = \sum_i \mathbf{L}_{Gi}^* = \sum_i \mathbf{GM}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i^* = \mathbf{GM}_1 \wedge m_1 \mathbf{v}_1^* + \mathbf{GM}_2 \wedge m_2 \mathbf{v}_2^*$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_G^* &= (\mathbf{GO} + \mathbf{OM}_1) \wedge m_1 \mathbf{v}_1^* + (\mathbf{GO} + \mathbf{OM}_2) \wedge m_2 \mathbf{v}_2^* \\
&= \mathbf{GO} \wedge (m_1 \mathbf{v}_1^* + m_2 \mathbf{v}_2^*) + \mathbf{OM}_1 \wedge m_1 \mathbf{v}_1^* + \mathbf{OM}_2 \wedge m_2 \mathbf{v}_2^* \\
&= 0 + \mathbf{OM}_1 \wedge m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_G) + \mathbf{OM}_2 \wedge m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_G) \\
&= \mathbf{OM}_1 \wedge m_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{OM}_2 \wedge m_2 \mathbf{v}_2 - (m_1 \mathbf{OM}_1 + m_2 \mathbf{OM}_2) \wedge \mathbf{v}_G \\
&= \mathbf{L}_O - \mathbf{OG} \wedge m \mathbf{v}_G
\end{aligned}$$

Cette relation, qui sera étudiée en 2^{e} année, est appelée théorème de Koenig relatif au moment cinétique

$$\boxed{\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_G^* + \mathbf{OG} \wedge m \mathbf{v}_G}$$

1.4.3 Énergie cinétique totale

$$E_c^* = \sum_i E_{ci}^* = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{*2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2}$$

$$\begin{aligned}
E_c^* &= \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} \\
&= \frac{1}{2} m_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_G)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_G)^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 - (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2).\mathbf{v}_G + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\mathbf{v}_G^2 \\
&= E_c - m \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^2 \\
&= E_c - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^2
\end{aligned}$$

Cette relation, qui sera étudiée en 2^{e}année, est appelée théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique

$$\boxed{E_c = E_c^* + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^2}$$

2 Dynamique du système

2.1 Forces intérieures et forces extérieures

Décomposons $\mathbf{F}_1$ en $\mathbf{F}_{ext\to1} + \mathbf{F}_{2\to1}$ où $\mathbf{F}_{ext\to1}$ est la force exercée par l'extérieur sur M_1 et $\mathbf{F}_{2\to1}$ la force exercée par M_2 sur M_1.

De même $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{ext\to2} + \mathbf{F}_{1\to2}$

Les forces $\mathbf{F}_{2\to1}$ et $\mathbf{F}_{1\to2}$ s'exerçant entre M_1 et M_2 sont appelées **forces intérieures** au système, les autres forces étant les **forces extérieures** au système

2.2 Théorème de la quantité de mouvement

ou théorème de la résultante cinétique

$\mathcal{R}$ étant galiléen, on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique à M_1

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{ext\to1} + \mathbf{F}_{2\to1}$$

et à M_2

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{ext\to2} + \mathbf{F}_{1\to2}$$

en ajoutant membre à membre on fait apparaître la quantité de mouvement totale

$$\frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{ext\to1} + \mathbf{F}_{ext\to2} + \mathbf{F}_{2\to1} + \mathbf{F}_{1\to2}$$

en utilisant la 3^{e} loi de Newton ou principe de l'action et de la réaction

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{ext}}$$

où $\mathbf{p}$ est la quantité de mouvement totale et $\mathbf{F}_{ext}$ la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur le système

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbf{p} & = & m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}_G \\ \dfrac{d\mathbf{p}}{dt} & = & m\dfrac{d\mathbf{v}_G}{dt} = m\mathbf{a}_G = \mathbf{F}_{ext} \end{array}}$$

Le mouvement de G est identique à celui d'un point matériel de masse $m = m_1 + m_2$ soumis à une force égale à la résultante des forces extérieures

2.3 Théorème du moment cinétique

Soit O un point fixe de $\mathcal{R}$ galiléen

Appliquons le théorème du moment cinétique en O à M_1

$$\frac{d\mathbf{L}_{O1}}{dt} = \mathbf{OM}_1 \wedge \mathbf{F}_1 = \mathbf{OM}_1 \wedge \mathbf{F}_{ext\to1} + \mathbf{OM}_1 \wedge \mathbf{F}_{2\to1}$$

et à M_2

$$\frac{d\mathbf{L}_{O2}}{dt} = \mathbf{OM}_2 \wedge \mathbf{F}_2 = \mathbf{OM}_2 \wedge \mathbf{F}_{ext\to2} + \mathbf{OM}_2 \wedge \mathbf{F}_{1\to2}$$

en ajoutant membre à membre on fait apparaître le moment cinétique total

$$\frac{d(\mathbf{L}_{O1} + \mathbf{L}_{O2})}{dt} = \mathbf{OM}_1 \wedge \mathbf{F}_{ext\to1} + \mathbf{OM}_2 \wedge \mathbf{F}_{ext\to2} + \mathbf{M_1M_2} \wedge \mathbf{F}_{1\to2}$$

en utilisant la 3^{e} loi de Newton ou principe de l'action et de la réaction

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{Oext}}$$

où $\mathbf{L}_O$ est le moment cinétique total en O et $\mathcal{M}_{Oext}$ le moment résultant en O des forces extérieures qui s'exercent sur le système

2.4 Étude énergétique

2.4.1 Théorème de l'énergie cinétique

$\mathcal{R}$ étant galiléen, on peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique à M_1

$$\frac{dE_{c1}}{dt} = \mathbf{F}_1.\mathbf{v}_1 = \mathbf{F}_{ext\to1}.\mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_{2\to1}.\mathbf{v}_1$$

et à M_2

$$\frac{dE_{c2}}{dt} = \mathbf{F}_2.\mathbf{v}_2 = \mathbf{F}_{ext\to2}.\mathbf{v}_2 + \mathbf{F}_{1\to2}.\mathbf{v}_2$$

en ajoutant membre à membre on fait apparaître l'énergie cinétique totale

$$\frac{d(E_{c1}+E_{c2})}{dt} = \mathbf{F}_{ext\to 1}.\mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_{ext\to 2}.\mathbf{v}_2 + \mathbf{F}_{2\to 1}.\mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_{1\to 2}.\mathbf{v}_2$$

Contrairement aux deux cas précédents, il n'y a, a priori, aucune raison que les termes faisant apparaître les forces intérieures disparaissent

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}}$$

où E_c est l'énergie cinétique totale, $\mathcal{P}_{ext}$ la puissance des forces extérieures et $\mathcal{P}_{int}$ la puissance des forces intérieures

2.4.2 Puissance des forces intérieures

Remarquons que la puissance des forces intérieures est indépendante du référentiel

$$\mathcal{P}_{int} = \mathbf{F}_{2\to 1}.\mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_{1\to 2}.\mathbf{v}_2 = \mathbf{F}_{1\to 2}.(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{F}_{1\to 2}.(\mathbf{v}_2^* - \mathbf{v}_1^*)$$

En particulier, pour un système rigide, $\mathcal{P}_{int} = 0$

2.4.3 Énergie potentielle - Énergie mécanique

Si toutes les forces sont conservatives ou ne travaillent pas

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{dE_p}{dt}$$

où E_p est l'énergie potentielle totale, alors l'énergie mécanique totale $E = E_c + E_p$ se conserve

3 Système isolé de deux points matériels

Si le système est isolé, $\mathbf{F}_{ext\to 1} = 0$ et $\mathbf{F}_{ext\to 2} = 0$, alors $\mathbf{F}_{ext} = 0$, $\mathcal{M}_{Oext} = 0$ et $\mathcal{P}_{ext} = 0$

3.1 Lois de conservation

3.1.1 Conservation de la quantité de mouvement

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = m\mathbf{v}_G = \mathbf{cte}}$$

Le référentiel barycentrique est donc galiléen

3.1.2 Conservation du moment cinétique

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L}_O = \mathbf{cte}}$$

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ étant en translation l'un par rapport à l'autre, on peut dériver indifféremment ; comme $\mathbf{L}_G^* = \mathbf{L}_O - \mathbf{OG} \wedge m\mathbf{v}_G$

$$\frac{d\mathbf{L}_G^*}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} - \mathbf{v}_G \wedge m\mathbf{v}_G - \mathbf{OG} \wedge m\frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}_G^*}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L}_G^* = \mathbf{cte}}$$

On aurait pu aussi appliquer le théorème du moment cinétique en G (fixe dans $\mathcal{R}^*$) dans $\mathcal{R}^*$ galiléen

3.1.3 Conservation de l'énergie mécanique

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{int}$$

Dans le cadre du programme les forces intérieures qui s'exercent entre M_1 et M_2 sont conservatives (par exemple interaction gravitationnelle ou électrostatique)

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = cte}$$

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ étant en translation l'un par rapport à l'autre, on peut dériver indifféremment ; comme $E_c^* = E_c - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2$

$$\frac{dE_c^*}{dt} = \frac{dE_c}{dt} - m\mathbf{v}_G.\frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{int} = \mathcal{P}_{int}^* = -\frac{dE_p^*}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dE^*}{dt} = 0 \Rightarrow E^* = cte}$$

3.2 Réduction du problème à deux corps à un problème à un corps

3.2.1 Mobile fictif - Masse réduite

Reprenons

$$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{2\to1} \qquad m_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{1\to2}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}_{1\to2}}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_{2\to1}}{m_1} = \frac{\mathbf{F}_{1\to2}}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_{1\to2}}{m_1} = \frac{\mathbf{F}_{1\to2}}{\mu}$$

avec $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, μ appelé **masse réduite**

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \frac{d^2\mathbf{OM}_2}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{OM}_1}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}{dt^2}$$

Soit P appelé **mobile fictif** et défini par

$$\mathbf{GP} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = r\mathbf{e}_r$$

La relation $\mu\,\mathbf{a} = \mathbf{F}_{1\to2}$ peut donc être considérée comme le PFD appliqué dans le référentiel barycentrique ($\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ et dérivation indifférente) à un mobile équivalent P de masse μ et soumis à une force $\mathbf{F}_{1\to2}$

En général, La force $\mathbf{F}_{1\to2}$ est conservative, portée par $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ et ne dépend que de la distance relative entre M_1 et M_2

$$\mathbf{F}_{1\to2} = F(r)\mathbf{e}_r$$

Tout se passe donc comme si le mobile équivalent P ressentait la force centrale conservative créée par le centre de force fixe G

3.2.2 Éléments cinétiques

La quantité de mouvement totale dans $\mathcal{R}^*$ est nulle par définition de $\mathcal{R}^*$

$$\mathbf{p}^* = m_1\mathbf{v}_1^* + m_2\mathbf{v}_2^* = 0$$

La vitesse du mobile fictif

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{GP}}{dt} = \frac{d\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}{dt} = \frac{d\mathbf{OM}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{OM}_1}{dt} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2^* - \mathbf{v}_1^*$$

d'où

$$\mathbf{v}_1^* = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v} \qquad \mathbf{v}_2^* = +\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v}$$

d'autre part, les relations $m_1\mathbf{GM}_1 + m_2\mathbf{GM}_2 = 0$ et $\mathbf{GP} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \mathbf{GM}_2 - \mathbf{GM}_1$ conduisent à

$$\mathbf{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{GP} \qquad \mathbf{GM}_2 = +\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{GP}$$

calculons alors l'énergie cinétique et le moment cinétique

$$E_c^* = \frac{1}{2}m_1\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(+\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_G^* &= \mathbf{GM}_1 \wedge m_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{GM}_2 \wedge m_2\mathbf{v}_2^* \\
&= -\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{GP} \wedge m_1\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v}\right) + \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{GP} \wedge m_2\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v} \\
&= \mathbf{GP} \wedge \mu\mathbf{v}
\end{aligned}$$