

Énergie potentielle - Énergie mécanique - Problèmes à un degré de liberté

Dans le chapitre précédent nous avons établi, à partir de la 2^e loi de Newton, le théorème de l'énergie cinétique et défini l'énergie cinétique, le travail et la puissance d'une force.

Table des matières

1 Travail d'une force - Exemples	1
1.1 Force de pesanteur	1
1.2 Force de rappel élastique	1
1.3 Force de frottement	1
1.4 Exercice	2
2 Énergie potentielle	2
2.1 Force conservative...	2
2.2 ...ou force dérivant d'une énergie potentielle	2
3 Énergie mécanique	2
3.1 Définition	2
3.2 Conservation	3
4 Problème à un degré de liberté	3
4.1 Positions d'équilibre	3
4.1.1 Équilibre stable - Exemple du ressort	3
4.1.2 Équilibre instable - Exemple du pendule	3
4.1.3 Généralisation	4
4.2 Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable	5

4.2.1 Exemple du pendule	5
4.2.2 Généralisation	5
4.3 Portrait de phase	5
4.3.1 Déterminisme mécanique - État d'un système	5
4.3.2 Lecture et interprétation	6

1 Travail d'une force - Exemples

1.1 Force de pesanteur

$$\delta W = \mathbf{F}.d\mathbf{OM} = -mg dz$$

$$W_{12} = -mg(z_2 - z_1) = mgz_1 - mgz_2 = E_{p1} - E_{p2}$$

avec

$$E_p(z) = mgz + cte$$

Attention à l'orientation des axes !

1.2 Force de rappel élastique

$$\delta W = \mathbf{F}.d\mathbf{OM} = -kx dx$$

$$W_{12} = -k\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right) = E_{p1} - E_{p2}$$

avec

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + cte$$

1.3 Force de frottement

$$\delta W = \mathbf{F}.d\mathbf{OM} = -kv_x dx$$

W_{12} ne peut pas se mettre sous la forme $E_{p1} - E_{p2}$.

1.4 Exercice

Soit dans le plan Oxy un point matériel soumis à la force :

$$\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{e}_x + 4xy\mathbf{e}_y$$

Calculer le travail de $O(0,0)$ à $A(1,1)$

- suivant la droite OA .
- suivant Ox de $x = 0$ à $x = 1$ puis suivant Oy de $y = 0$ à $y = 1$.
- suivant Oy de $y = 0$ à $y = 1$ puis suivant Ox de $x = 0$ à $x = 1$.

W dépend du chemin suivi.

2 Énergie potentielle

2.1 Force conservative...

Une force est *conservative* (ou encore dérive d'une énergie potentielle) s'il existe une fonction $E_p(x, y, z, (t))$ appelée *énergie potentielle* telle que $\delta W = -dE_p$.

L'énergie potentielle est définie à une constante près.

Le travail ne dépend plus du chemin suivi

$$W = \int \delta W = - \int dE_p = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

en particulier $\oint \delta W = 0$.

$\int \delta W = \int \mathbf{F}.d\mathbf{OM}$ est aussi appelée circulation de \mathbf{F} .

2.2 ...ou force dérivant d'une énergie potentielle

$$dE_p = -\delta W = -\mathbf{F}.d\mathbf{OM} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$E_p(x, y, z) \Rightarrow dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

que l'on peut écrire de manière plus condensée $\mathbf{F} = -\mathbf{grad}(E_p)$.

Exemple : le poids est opposé au gradient de mgz .

Dans le plan Oxy , \mathbf{F} dérive d'une énergie potentielle si $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$.

Exemple : $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{e}_x + 4xy\mathbf{e}_y$ ne dérive pas d'une énergie potentielle.

3 Énergie mécanique

3.1 Définition

$$dE_c = (\mathbf{F}^c + \mathbf{F}^{nc}).d\mathbf{OM}$$

$$dE_c = \delta W^c + \delta W^{nc} = -dE_p + \delta W^{nc}$$

$$d(E_c + E_p) = \delta W^{nc}$$

$E_c + E_p = E_m$ appelé *énergie mécanique*

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives :

$$\Delta E_m = W^{nc}$$

ou encore dans un référentiel galiléen, la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est égale à la puissance des forces non conservatives :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}^{nc}$$

3.2 Conservation

Si la puissance dissipée par les forces non conservatives est nulle à tout instant alors $E_m = cte$ (équation appelée *intégrale première de l'énergie*).

Exemple du ressort : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cte$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

Exemple du pendule : $E_m = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos\theta) = cte$

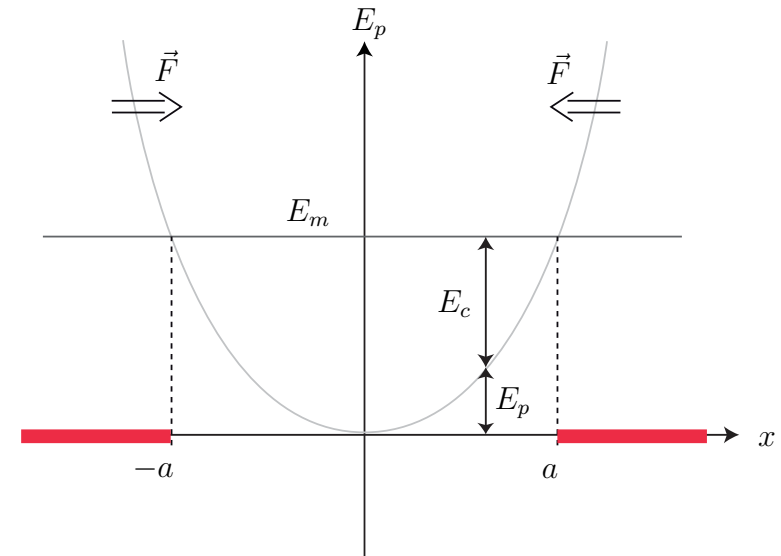
$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

4 Problème à un degré de liberté

4.1 Positions d'équilibre

4.1.1 Équilibre stable - Exemple du ressort

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$



Comme $E_m = cte = E_c + E_p$ et $E_c \geq 0$, E_m est la plus grande valeur que puisse prendre E_p . Le mouvement est donc limité par $x = -a$ et $x = +a$.

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -kx$$

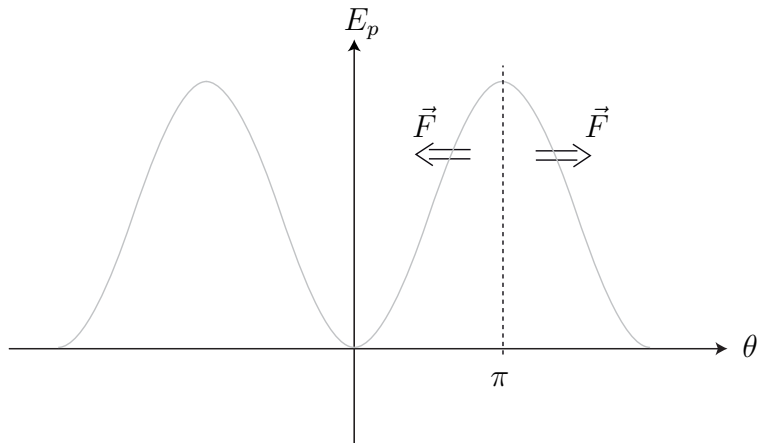
Entre 0 et a , $F_x \leq 0$ ramène le système en $x = 0$.

Entre 0 et $-a$, $F_x \geq 0$ ramène aussi le système en $x = 0$.

$x = 0$, le minimum d'énergie potentielle, correspond à une position d'équilibre stable pour le ressort.

4.1.2 Équilibre instable - Exemple du pendule

$$E_p = mgl(1 - \cos\theta)$$



Comme pour le ressort, $\theta = 0$, le minimum d'énergie potentielle, correspond à une position d'équilibre stable pour le pendule.

Regardons maintenant ce qui se passe autour du maximum d'énergie potentielle $\theta = \pi$:

$$\delta W = F_r dr + F_\theta r d\theta = F_\theta l d\theta = -dE_p$$

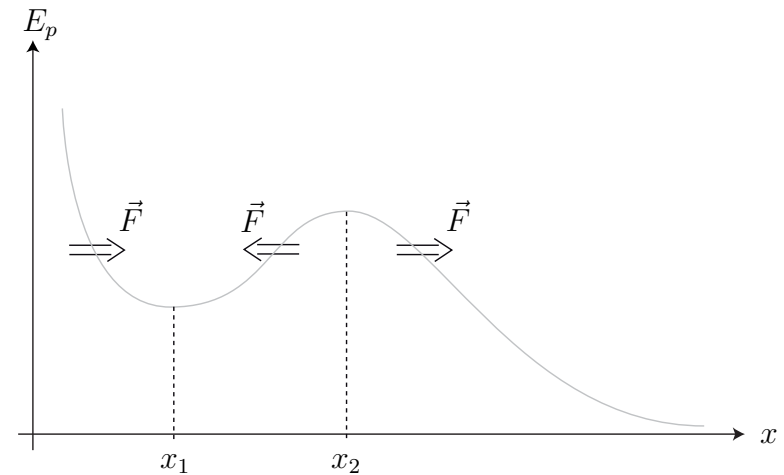
$$F_\theta = -\frac{1}{l} \frac{dE_p}{d\theta} = -mg \sin \theta$$

Entre 0 et π , $F_\theta \leq 0$ éloigne le système de $\theta = \pi$.

Entre π et 2π , $F_\theta \geq 0$ éloigne aussi le système de $\theta = \pi$.

$\theta = \pi$, le maximum d'énergie potentielle, correspond à une position d'équilibre instable pour le pendule.

4.1.3 Généralisation



Un minimum d'énergie potentielle x_1 correspond à une position d'**équilibre stable** :

$$\left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x_1} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_1} > 0$$

Un maximum d'énergie potentielle x_2 correspond à une position d'**équilibre instable** :

$$\left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x_2} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_2} < 0$$

Si $E_m < E_p(x_1)$, le système peut s'échapper vers les $x > 0$, on a un **état de diffusion**.

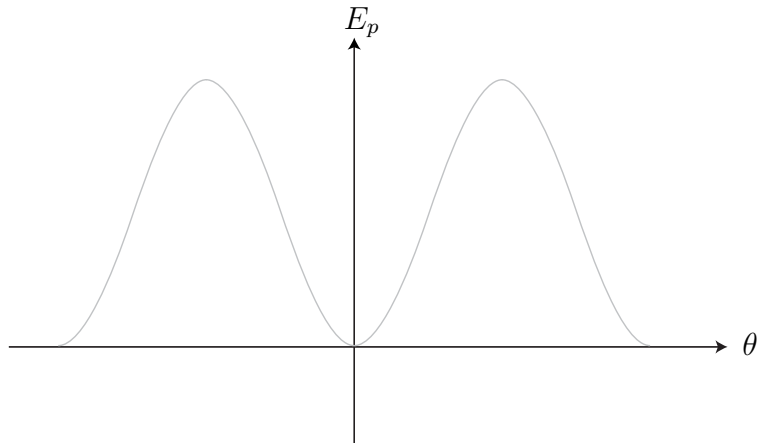
Si $E_p(x_1) < E_m < E_p(x_2)$, le système est confiné entre x_a et x_b , on a un **état lié**.

Si $E_m > E_p(x_2)$, on a encore un état de diffusion.

(Faire 3 schémas différents)

4.2 Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

4.2.1 Exemple du pendule



$$E_p = mgl(1 - \cos \theta)$$

Au voisinage de $\theta = 0$, $\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$E_p \simeq mgl \frac{\theta^2}{2}$$

$$E_m = cte = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow 0 = ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Ce que l'on retrouve aussi en faisant $\sin \theta \simeq \theta$.

4.2.2 Généralisation

Une fonction $f(x)$ peut être développée autour de x_0 selon

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

(Développement en série de Taylor)

Exemple : $f(x) = \cos x$ autour de $x = 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Développons $E_p(x)$ autour d'une position d'équilibre $x = x_e$

$$\begin{aligned} E_p(x) &= E_p(x_e) + (x - x_e) \left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x_e} + \frac{(x - x_e)^2}{2} \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_e} + \dots \\ &= E_p(x_e) + 0 + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 + \dots \end{aligned}$$

en posant $k = \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_e}$

L'énergie mécanique se conservant

$$E_m = cte = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_e) + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 \Rightarrow m\ddot{x} + k(x - x_e) = 0$$

ou encore en posant $X = x - x_e$

$$m\ddot{X} + kX = 0$$

Si $k > 0$, on retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, le système oscille autour de la position d'équilibre qui est donc stable.

Si $k < 0$, $X = A \cosh(\omega t + \varphi)$, le système s'éloigne de la position d'équilibre qui est donc instable.

4.3 Portrait de phase

4.3.1 Déterminisme mécanique - État d'un système

Pour un problème à un degré de liberté x , la 2^e loi de Newton donne

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \left(x, \frac{dx}{dt}, t \right)$$

équation différentielle du 2^e ordre équivalent à

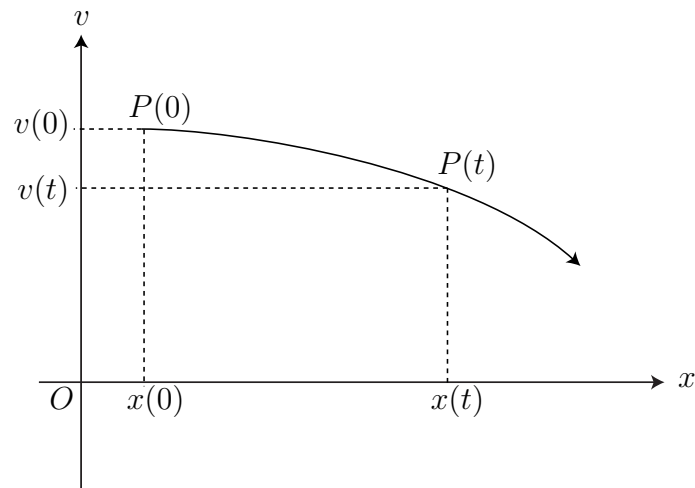
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ m \frac{dv}{dt} = F(x, v, t) \end{cases}$$

système de deux équations différentielles d'ordre un.

Ce système admet une solution unique si $x(0)$ et $v(0)$ sont donnés.

Les systèmes mécaniques ont une évolution unique pour des conditions initiales déterminées (principe du déterminisme mécanique).

L'**état d'un système** à un degré de liberté est représenté à tout instant, par un point $P(t)$ de coordonnées (x, v) dans un plan appelé **plan de phase**.



Quand le temps s'écoule, le point $P(t)$ décrit une courbe appelée **trajectoire de phase**. Toute trajectoire de phase débute en $P(0)$ de coordonnées $(x(0), v(0))$.

Le **portrait de phase** d'un système est l'ensemble des trajectoires de phase du sys obtenues en considérant l'ensemble des conditions initiales réalisables.

4.3.2 Lecture et interprétation

(voir document)

Oscillateur

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2\omega_0^2} = 1$$

c'est l'équation d'une ellipse.

Oscillateur amorti

L'énergie mécanique diminue.

Pendule

Suivant les conditions initiales, le mouvement peut-être :

- harmonique
- périodique mais non harmonique
- révolutif

Notons la sensibilité du pendule aux conditions initiales.

Retenons :

Si la trajectoire est fermée, le mouvement est périodique ; si la trajectoire est en plus elliptique, le mouvement est sinusoïdal ; une bosse (vitesse maximale) sur la trajectoire de phase correspond à une position d'équilibre stable ; un creux (vitesse minimale) correspond à une position d'équilibre instable.