Dynamique en référentiel non galiléen

Table des matières

1 Principe de relativité galiléenne

1.1 Référentiels galiléens

> Rappel : un référentiel est galiléen si, dans ce référentiel, un point matériel isolé à un mouvement rectiligne uniforme

Soit M un point matériel isolé dans $\mathcal{R}$ galiléen alors $\mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}} = 0$

Soit $\mathcal{R}'$ un autre référentiel ; la composition des accélérations donne

$$\mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}} = \mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c$$

$\mathcal{R}'$ est galiléen si $\mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}'} = 0$ c'est à dire si

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_c = 0$$

($\mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c = 0$ ne pouvant être qu'exceptionnel)

$$\mathbf{a}_c = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_e = \mathbf{a}(O')_{\mathcal{R}} = 0$$

$\mathcal{R}'$ est donc en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$

> L'ensemble des référentiels galiléens est constitué par tous les référentiels en translation rectiligne uniforme par rapport à l'un d'entre eux

1.2 Relativité galiléenne

Soit $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen

De même que pour le temps, la mécanique newtonienne postule également (implicitement) l'invariance de la masse et de la force

$$t' = t \qquad m' = m \qquad \mathbf{F}' = \mathbf{F}$$

En notant $\mathbf{u} = \mathbf{v}(O')_{\mathcal{R}} = \mathbf{cte}$ la vitesse de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, la composition des vitesses donne

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

Soit $\mathbf{p}'$ la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}'$

$$\mathbf{p}' = m'\mathbf{v}' = m(\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

$\mathcal{R}$ étant galiléen

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = \mathbf{F}'$$

Le PFD a donc même formulation dans tous les référentiels galiléens ; plus généralement :

> Dans des référentiels en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, appelés référentiels galiléens, les lois de la physique sont invariantes. Ou encore : les lois de la physique restent les mêmes dans n'importe quel référentiel galiléen

Le principe de relativité repose donc sur cette impression que l'on a d'être à l'arrêt quand on est dans un véhicule qui se déplace rectilignement sans cahot à vitesse constante

2 Lois de la dynamique en référentiel non galiléen

Soient $\mathcal{R}'$ en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen et $\mathbf{F}$ la résultante des forces s'exerçant sur un point matériel M

2.1 PFD

2.1.1 « Forces d'inertie »

Dans $\mathcal{R}$ galiléen

$$m\mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}} = \mathbf{F}$$

En utilisant la composition des accélérations

$$m(\mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c) = \mathbf{F}$$

ou encore

$$m\mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}'} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_e - m\mathbf{a}_c$$

Dans $\mathcal{R}'$ non galiléen, on peut appliquer le PFD en rajoutant les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis

$$\mathbf{F}_{ie} = -m\mathbf{a}_e \qquad \mathbf{F}_{ic} = -m\mathbf{a}_c$$

Ces forces n'étant pas liées à la présence d'un autre corps (masse, charge) mais seulement au caractère non galiléen du référentiel sont plutôt appelées **pseudo-forces**

2.1.2 Translation et rotation uniforme autour d'un axe fixe

Si $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$ (voir chapitre précédent)

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}(O')_{\mathcal{R}} \qquad \mathbf{a}_c = 0$$

donc

$$\mathbf{F}_{ie} = -m\mathbf{a}_e = -m\mathbf{a}(O')_{\mathcal{R}} \qquad \mathbf{F}_{ic} = -m\mathbf{a}_c = 0$$

$\mathbf{F}_{ie}$ est par exemple la force qui nous plaque contre le siège d'une voiture qui accélère

Si $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe de $\mathcal{R}$ (voir chapitre précédent)

$$\mathbf{a}_e = -r\omega^2\mathbf{e}_r \qquad \mathbf{a}_c = 2\omega\dot{r}\mathbf{e}_\theta$$

donc

$$\mathbf{F}_{ie} = -m\mathbf{a}_e = +mr\omega^2\mathbf{e}_r \qquad \mathbf{F}_{ic} = -m\mathbf{a}_c = -2m\omega\dot{r}\mathbf{e}_\theta$$

$\mathbf{F}_{ie}$ est par exemple la force centrifuge qui tend à nous expulser d'un manège

2.2 Théorème du moment cinétique

Soit O' un point fixe de $\mathcal{R}'$ en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen et $\mathbf{F}$ la résultante des forces s'exerçant sur un point matériel M

Dérivons le moment cinétique en O' du point M dans $\mathcal{R}'$

$$\mathbf{L}_{O'}(M)_{\mathcal{R}'} = \mathbf{O'M} \wedge m\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}'}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{L}_{O'}(M)_{\mathcal{R}'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}'} \wedge m\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \mathbf{O'M} \wedge m\mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}'}$$

Le PFD dans $\mathcal{R}'$ donne

$$\left(\frac{d\mathbf{L}_{O'}(M)_{\mathcal{R}'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \mathbf{O'M} \wedge (\mathbf{F} + \mathbf{F}_{ie} + \mathbf{F}_{ic})$$

Dans $\mathcal{R}'$ non galiléen, on peut donc appliquer le théorème du moment cinétique en rajoutant les moments des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis

2.3 Théorème de la puissance cinétique

Soit $\mathcal{R}'$ en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen et $\mathbf{F}$ la résultante des forces s'exerçant sur un point matériel M

Multiplions scalairement par $\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}'}$ le PFD dans $\mathcal{R}'$

$$m\left(\frac{d\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}.\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}'} = (\mathbf{F} + \mathbf{F}_{ie} + \mathbf{F}_{ic}).\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}'}$$

on obtient

$$\left(\frac{dE_c(M)_{\mathcal{R}'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \mathbf{F}.\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \mathbf{F}_{ie}.\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \mathbf{F}_{ic}.\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}'}$$

comme $\mathbf{F}_{ic} = -m\mathbf{a}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}'}$

$$\mathbf{F}_{ic}.\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}'} = 0$$

Finalement, dans $\mathcal{R}'$ non galiléen, on peut appliquer le théorème de la puissance cinétique en rajoutant seulement la puissance de la force d'inertie d'entraînement, la puissance de la force d'inertie de Coriolis étant nulle

3 Caractère galiléen approché de quelques référentiels d'utilisation courante

3.1 Référentiel de Copernic

Le référentiel de Copernic a pour origine le centre de masse du système solaire (presque confondu avec le centre du Soleil) et ses axes sont dirigés vers trois étoiles suffisamment éloignées pour pouvoir être considérées comme fixes

Il est galiléen avec une excellente approximation

3.2 Référentiel héliocentrique

Idem avec comme origine le centre du Soleil

Il est galiléen avec une excellente approximation

3.3 Référentiel géocentrique

Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de la Terre et ses axes gardent une direction fixe par rapport à ceux du référentiel de Copernic ; le référentiel géocentrique est donc en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic

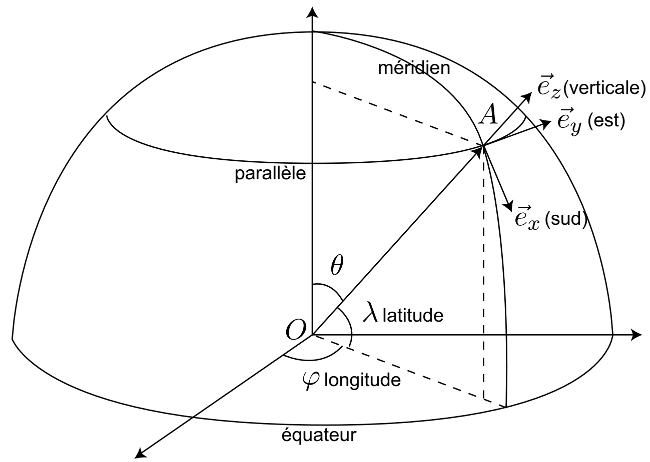
L'accélération de la Terre dû à sa trajectoire elliptique autour du Soleil est faible, si on la néglige, on peut alors considérer que le référentiel géocentrique est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic et qu'il est donc lui-même galiléen

3.4 Référentiel terrestre - Poids

Le référentiel terrestre a pour origine un point A à la surface de la Terre et ses axes
Ox suivant un méridien dans la direction Nord-Sud
Oy suivant un parallèle dans la direction Ouest-Est
Oz suivant la verticale ascendante du lieu
tournent autour de l'axe pôle Sud-pôle Nord. On supposera

$$\omega_{\mathcal{R}_{terrestre}/\mathcal{R}_{gocentrique}} = \mathbf{cte}$$

ce qui revient à considérer que le référentiel terrestre est en rotation uniforme autour d'un axe fixe du référentiel géocentrique que l'on considérera galiléen ; le référentiel terrestre n'est donc pas galiléen.



Appliquons le PFD dans le référentiel terrestre à un point matériel M de masse m soumis en plus de l'attraction terrestre à une résultante des forces $\mathbf{f}$

$$m\mathbf{a}(M) = m\mathcal{G} + \mathbf{f} + \mathbf{F}_{ie} + \mathbf{F}_{ic}$$

$$m\mathbf{a}(M) = m\mathcal{G} + \mathbf{f} + m\omega^2\mathbf{HM} - 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}(M)$$

$$m\mathbf{a}(M) = \mathbf{f} + m(\mathcal{G} + \omega^2\mathbf{HM}) - 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}(M)$$

(H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation)

Soit un fil à plomb, le poids est défini comme la force opposée à la tension du fil à l'équilibre (relatif dans le référentiel terrestre)

$$0 = \mathbf{T} + m(\mathcal{G} + \omega^2 \mathbf{HM}) = \mathbf{T} + \mathbf{P}$$

Le poids prend donc en compte une partie du caractère non galiléen du référentiel terrestre

$$\boxed{\mathbf{P} = m(\mathcal{G} + \omega^2 \mathbf{HM})}$$

En tenant compte du poids, le PFD dans le référentiel terrestre s'écrit

$$m\mathbf{a}(M) = \mathbf{f} + \mathbf{P} - 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}(M)$$

Lorsque l'on considérait le référentiel terrestre galiléen, on négligeait la force d'inertie de Coriolis mais on prenait quand même en compte le force d'inertie d'entraînement par l'intermédiaire du poids