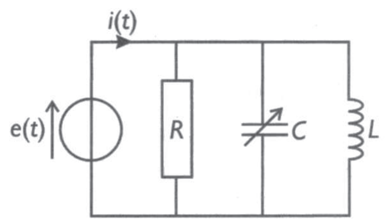
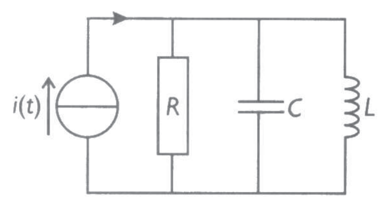
Filtres

Exercice 1. Étude d'un circuit (R,L,C) parallèle (d'après concours).

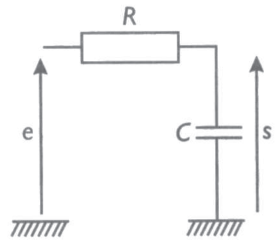


On considère le circuit ci-contre, obtenu en associant les trois éléments R, L et C en parallèle ; R est une résistance de valeur $500\,\Omega$, C est un condensateur de capacité variable et L est une bobine dont on néglige la résistance, mais d'inductance inconnue.
L'ensemble est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de f.é.m. $e = E\sqrt{2}\cos\omega t$, avec $E = 10\,V$ et $\omega = 10^3\,rad/s$.
1. On fait varier C, et on constate que le courant débité par le générateur a même valeur efficace pour deux valeurs de la capacité, soit $C_1 = 2,3\,\mu F$ et $C_2 = 6,8\,\mu F$. Montrer que l'on peut en déduire la valeur de l'inductance et la calculer. Donner la valeur efficace du courant correspondant.
2. Pour quelle valeur C_0 de la capacité le courant débité par le générateur est-il minimal ? Donner son expression dans ce cas. Justifier le nom de « circuit bouchon » donné au circuit dans ce cas.



3. La capacité du condensateur étant fixée à une valeur déterminée C, on alimente le circuit parallèle par une source idéale de courant sinusoïdal de pulsation réglable ω.
a. Calculer la puissance moyenne P fournie par la source et montrer qu'elle passe par un maximum P_{max} pour une valeur ω_0 de la pulsation à déterminer.
b. En introduisant la grandeur sans dimension $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, mettre la puissance moyenne sous la forme $P = \dfrac{P_{max}}{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}$ en précisant la valeur de Q en fonction de R, C et ω_0.
c. Montrer que la bande passante du circuit, soit $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$, où ω_1 et ω_2 sont les pulsations pour lesquelles $P = P_{max}/2$, vaut $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$.
d. Quelle est la valeur maximale de la tension aux bornes du générateur ?
e. Déterminer la valeur efficace I_C du courant traversant le condensateur ; préciser dans quelles conditions cette valeur passe par un maximum que l'on donnera.

Exercice 2. Fonction de transfert d'un filtre RC (d'après concours).
1. Étude théorique :
Le circuit de la figure 1 est alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation ω ; toute grandeur sinusoïdale telle que e sera représentée par son expression complexe associée $\underline{e}$.



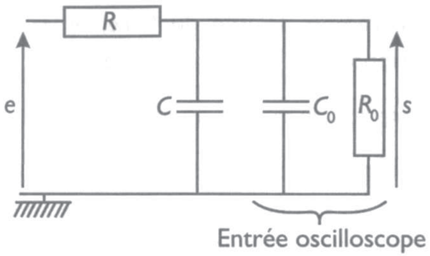
1.1. Exprimer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$ en fonction des paramètres du système.

1.2. Le diagramme de Bode du circuit comporte les deux courbes $G_{dB} = f(\log\omega)$ qui est le module de $\underline{H}$ en décibels, et $\varphi = g(\log\omega)$ qui est l'argument de $\underline{H}$. Que représentent H et φ ?
1.2.a. Courbe G_{dB}. Étudier le comportement asymptotique du circuit lorsque $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$. Montrer que la fréquence de coupure ν_C (atténuation à -3 dB) correspond à l'intersection des deux asymptotes trouvées précédemment. Quelle est la bande passante à -3 dB de ce filtre dont on précisera la nature ? Que vaut le gain $G_{dB}(\omega = 0)$ en dB ? Que vaut l'atténuation, en dB par décade, en dehors de la bande passante ?
1.2.b. Courbe φ. Étudier de même le comportement asymptotique ; que vaut φ à la fréquence de coupure ?

1.3. Application numérique : calculer $G_{dB}(\omega = 0)$ et ν_C pour les deux filtres suivants :
(1) $R = 4,7\,k\Omega$ et $C = 6,8\,nF$
(2) $R = 680k\Omega$ et $C = 47\,pF$.

Tracer le diagramme de Bode pour $\dfrac{\omega}{\omega_C} \in [0,1;10]$.

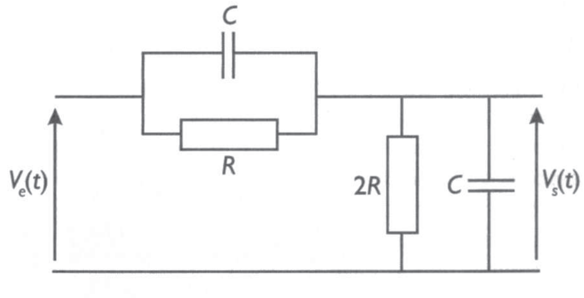
2. Étude expérimentale.
Dans l'étude expérimentale de ces filtres, on mesure e et s en envoyant la tension correspondante à l'entrée d'un oscilloscope, par l'intermédiaire d'un câble coaxial. Si le tracé de la courbe $G_{dB} = f(\log\omega)$ donne une courbe tout à fait proche de la courbe théorique pour le filtre (1), il n'en est pas du tout de même pour le filtre (2) ($G_{dB}(\omega = 0)$ et ν_C différents) ; on cherche à justifier les écarts observés. L'oscilloscope a une impédance d'entrée caractérisée par une capacité $C_0 = 30\,pF$ et une résistance $R_0 = 1\,M\Omega$ (figure 2).



2.1.a. Calculer la nouvelle fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$. En déduire le nouveau gain $G_{1_{dB}}(\omega = 0)$ dans la bande passante et la nouvelle fréquence de coupure ν_{C1} à -3 dB.
2.1.b. Application numérique. Calculer $G_{1_{dB}}(\omega = 0)$ et ν_{C1} pour les deux filtres. L'expérience donne pour le filtre (2) $G_{dB}(\omega = 0) = -4,5\,dB$ dans la bande passante. Que peut-on en conclure ?

2.2. Pour justifier l'écart sur la fréquence de coupure du filtre (2), on prend en plus en compte le câble coaxial.
2.2.a. Ce câble comporte un conducteur cylindrique intérieur et un conducteur cylindrique extérieur (d'épaisseur négligeable), séparés par un isolant ; le câble présente donc un effet capacitif ; soit Γ sa capacité par unité de longueur. Comment prendre en compte une longueur l de ce câble placé entre le filtre et l'oscilloscope dans le circuit ? Calculer la nouvelle fonction de transfert $\underline{H}_2$ ainsi que le gain $G_{2_{dB}}(\omega = 0)$ dans la bande passante et la fréquence de coupure ν_{C2}.
2.2.b. Application numérique : l'expérience donne pour le filtre (2) $\nu_C = 3100\,Hz$ avec un câble de longueur $l = 50\,cm$, et $\nu_C = 1400\,Hz$ avec un câble de longueur $l = 200\,cm$. Montrer que l'on peut en déduire Γ et donner sa valeur.

Exercice 3. Filtre atténuateur.
On considère le filtre suivant :



1. Prévoir le comportement du filtre à basse et à haute fréquence sans calcul.

2. Déterminer l'expression de sa fonction de transfert que l'on mettra sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$$

3. Tracer le diagramme de Bode en remarquant que la fonction de transfert est un produit de fonctions de transfert connues. On tracera G_{dB} en fonction de $log\dfrac{\omega}{\omega_1}$, c'est à dire que la pulsation ω_1 est la pulsation de référence.