Dynamique du point en référentiel galiléen

Exercice 1. L'oiseau et le chasseur.
L'étude porte sur la trajectoire d'un projectile dans le champ de pesanteur supposé uniforme. Le repère cartésien $Oxyz$ de base $(O, \mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$ est tel que Oz soit la verticale ascendante. L'altitude $z = 0$ représente le niveau du sol. A l'instant $t = 0$, on envoie un projectile M de masse m depuis le point O avec une vitesse initiale $\mathbf{v_0}$ inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale Ox.
1. Déterminer la trajectoire du projectile M en l'absence de frottement.
2. Calculer, en fonction de v_0 et de α, l'altitude maximale atteinte z_{max} et la portée x_p. A une vitesse v_0 donnée, quelle est la valeur de α donnant la portée la plus importante notée $x_{p_{max}}$. Quelle est la durée entre le départ et l'impact ?
A.N. : $v_0 = 400\,m.s^{-1}$.
3. Un chasseur attend une cible (un oiseau). On suppose ici que v_0 est fixé (fusil), mais que α peut être choisi entre 0 et $\pi/2$. Trouver l'équation de la courbe séparant la zone saine de la zone dangereuse dans laquelle l'oiseau ne doit pas pénétrer.

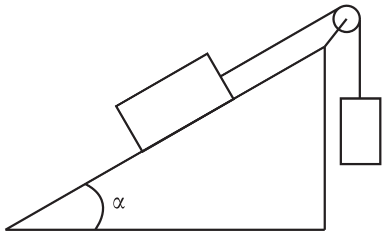
Exercice 2. Trajectoire dans le champ de pesanteur avec résistance de l'air.
Une fusée balistique, assimilée à un point matériel M, de masse m, est mise à feu à la surface de la Terre avec une vitesse $\mathbf{v_0}$, inférieure à la vitesse de satellisation, faisant un angle α avec l'horizontale. On tient compte de la résistance de l'air, opposée à la vitesse de la fusée $\mathbf{f} = -k\,\mathbf{v}$.
1. Exprimer $v_x(t)$, $v_z(t)$, $x(t)$ et $z(t)$.
2. Sachant que pour $v_0 = 1\,km/s$ et $\alpha = 30^\circ$, la fusée atteint le sommet de sa trajectoire au bout d'un temps $t_0 = 46\,s$, déterminer k puis l'équation de l'asymptote verticale de la trajectoire de M, et enfin le vitesse limite de M. On fera les approximations nécessaires ($k \ll 1$).

Exercice 3. Mouvement vertical dans l'air.
Un objet ponctuel de masse m est lancé verticalement vers le haut depuis le point O avec la vitesse initiale v_0. L'action de l'air se réduit à une force de frottement opposée à la vitesse, de module kv^2.
On fera apparaître les grandeurs $u = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ et $l = \dfrac{m}{2k}$, dont on précisera la signification.
1. Exprimer la vitesse v de l'objet en fonction de son altitude z dans la phase d'ascension. En déduire l'altitude maximale z_{max} de l'objet.
2. Déterminer la durée T_1 de la montée.
3. Calculer la vitesse v_2 de l'objet quand il retombe en O.
4. Déterminer la durée T_2 de la chute de l'objet jusqu'à son point de départ.
5. A.N. : $v_0 = 25\,m.s^{-1}$; $u = 10\,m.s^{-1}$; $g = 9,8\,m.s^{-2}$.
Données :
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

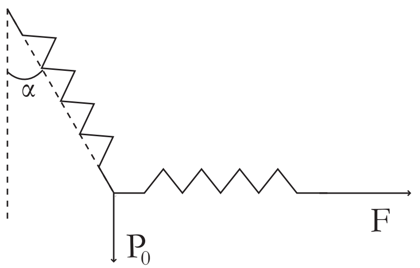
Exercice 4. Équation horaire.
Une voiture, de masse m, roulant rectilignement à la vitesse $\mathbf{v_0} = v_0\,\mathbf{i}$, coupe son moteur à $t = 0$ et n'est plus soumise, suivant $\mathbf{i}$, qu'à une force de frottement proportionnelle à la vitesse $\mathbf{F} = -h\,\mathbf{v}$.
1. Écrire la loi de variation de v en fonction du temps (on fera apparaître la constante de temps τ que l'on définira).
2. En déduire l'équation horaire du mouvement.

Exercice 5. Mouvement dans un champ de force avec frottement.
Une particule M, de masse m, se déplace sur un plan horizontal à partir du point M_0, de coordonnées cartésiennes (O, y_0). Elle est soumise à un champ de force $\mathbf{F} = -\alpha\,\mathbf{OM}$ et subit en outre une force résistante proportionnelle à sa vitesse $\mathbf{f} = -\beta\,\mathbf{v}$ (β et α sont des constantes positives).
1. Quel système de coordonnées est le plus adapté à la situation ? Justifier.
2. Établir les équations différentielles du mouvement de M.
3. En déduire, dans le cas où $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega = cte$ (avec $\theta = (Ox, \mathbf{OM})$), l'équation horaire $r(t)$ (où $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$) et la valeur de la vitesse angulaire.
A.N. : $m = 50\,g$, $\alpha = 200\,N.m^{-1}$ et $\beta = 3\,N.m^{-1}.s$

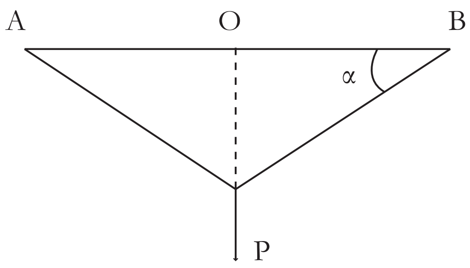
Exercice 6. Masses et poulie.
Considérons le dispositif ci-dessous.
Un objet de masse m_1 se déplace, sans frottement, sur un plan incliné. Il est relié par un fil inextensible et sans masse à un objet de masse m_2. La poulie est idéale, la tension du fil, en module, est la même de chaque côté.
1. Quel doit être le rapport des masses pour que le système reste en équilibre ?
2. On considère le cas $m_2 = 3m_1$, dans quel sens a lieu le mouvement ? Calculer la valeur de la tension du fil. A.N. : $\alpha = 35^{\circ}$; $m_2 = 1kg$.



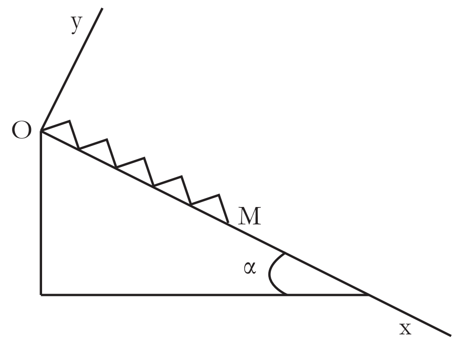
Exercice 7. Deux ressorts.
On dispose de deux ressorts linéaires identiques de longueur au repos L. Chacun, soumis à un poids P_0, prend un allongement l_0, déterminé par leur raideur commune k. On suspend un poids P_0 à l'un des ressorts et on tire horizontalement le poids à l'aide de l'autre ressort avec une force variable F. Le premier fait alors un angle α avec la verticale. Pour chaque valeur de α correspondant à une force F, le ressort (1) prend un allongement l_1 et le ressort (2) un allongement l_2.
Calculer les allongements l_1 et l_2 en fonction de α et l_0.



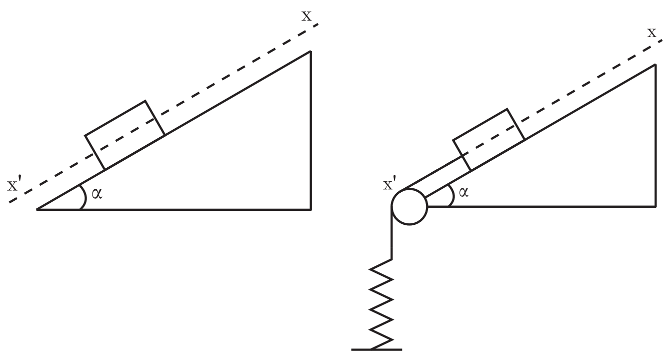
Exercice 8. Caoutchouc.
Un brin de caoutchouc de longueur $2L$ non tendu est fixé entre deux points A et B. On admettra que son poids est négligeable et que le brin est horizontal. On accroche un poids P au milieu O de AB. Sachant que le caoutchouc tendu avec une force F s'allonge de l tel que $F = kl$, exprimer P en fonction de k, L et α.



Exercice 9. Ressort et plan incliné.
On considère, sur un plan incliné, un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et à un point matériel M de masse m. On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné.
1. Déterminer l'abscisse x_e du point M à l'équilibre en fonction de l_0, m, g, k et α.
2. A partir de la position d'équilibre, M est déplacé d'une distance d comptée algébriquement sur Ox et lâché sans vitesse initiale. Établir l'équation horaire $x(t)$ en fonction de d, k, m et x_e.



Exercice 10. Plan incliné.
1. La figure 1 représente une portion de plan incliné sur l'horizontale d'un angle α. Un chariot de masse m est mobile sans frottement sur des rails posés parallèlement à une ligne de plus grande pente du plan. Sa position est repérée sur l'axe xOx' par l'abscisse x de son centre d'inertie G qui est nulle à l'instant initial. On lance le chariot vers le haut à la vitesse $\mathbf{v_0}$.
Pour quelle valeur de v_0, exprimée en fonction de g, a, α, la vitesse du chariot s'annule-t-elle au point A d'abscisse $x = a$?
2. La figure 2 représente le même plan incliné muni d'un dispositif à ressort, poulie et fil, qui permet d'exercer sur le chariot une force de rappel $F_x = -kx$, k étant une constante. Le chariot est lancé vers le haut avec la vitesse $\mathbf{v}'_\mathbf{0}$, atteint le point B où sa vitesse s'annule et redescend. Comme précédemment, $x = 0$ à l'instant initial.
Écrire et intégrer l'équation différentielle du mouvement (on exprimera l'amplitude et la phase à l'origine en fonction de v'_0, k, m, g et α). Pour quelle valeur de v'_0 le point B est-il confondu avec le point A (on donnera v'_0 en fonction de la pulsation propre ω_0, a, et v_0) ?



Exercice 11. Corps flottant.
Un corps de masse m flotte sur un liquide de masse volumique ρ. Sa surface à la ligne de flottaison étant S, calculer la période des oscillations verticales du système en fonction de m, ρ, S et g intensité du champ de pesanteur.
On admettra pour simplifier que la surface S reste constante de part et d'autre de la position d'équilibre, sur un longueur supérieure à l'amplitude des oscillations.
On rappelle que la poussée d'Archimède $\mathbf{\Pi}$ est équivalente à une force unique, verticale, dirigée vers le haut, d'intensité égale au poids du fluide déplacé, s'appliquant en C (On suppose ici C à la verticale du centre de gravité G).

Exercice 12. Un jeu d'enfant.
Un enfant esquimau joue sur le toit de son igloo. L'enfant se laisse glisser depuis le sommet S de l'igloo, qui a la forme d'une demi-sphère de rayon a et de centre O. La position de l'enfant, assimilé à un point matériel M, de masse m, est repérée par l'angle $\theta = (Oz, \mathbf{OM})$, Oz étant la verticale ascendante.
1. A partir de quelle position (repérée par l'angle θ_0) l'enfant perd-il le contact avec l'igloo (on néglige bien sûr les frottements).
2. Quel est le mouvement ultérieur de l'enfant ? Quelle est a vitesse quand il retombe sur le sol ? Effectuer l'application numérique avec $m = 30\,kg$, $a = 2\,m$ et $g = 9,8\,m.s^{-2}$. Commenter.

Exercice 13. Point mobile dans un cylindre creux.
Du point le plus bas P_0 d'un cylindre creux, de rayon R et d'axe horizontal, est lancée une particule de masse m avec une vitesse horizontale $\mathbf{v_0}$ perpendiculaire à la génératrice passant par P_0. Cette particule P, qui se déplace dans le plan de section droite du cylindre de centre O, est repérée à chaque instant par l'angle $\theta = (\mathbf{OP_0}, \mathbf{OP})$. On désigne g le module du champ de pesanteur supposé constant. P glisse sans frottement.
1. Exprimer $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ.
2. Exprimer la réaction N du cylindre sur P en fonction de θ.
3. Calculer l'amplitude θ_M des oscillations de P.
4. Pour quelles valeurs de la vitesse initiale v_0, la particule P sera-t-elle animée d'un mouvement révolutif ?

Exercice 14. Anneau.
Une tige tourne dans le plan horizontal xOy autour de son extrémité O à la vitesse angulaire constante ω. Sur cette tige, un anneau M de masse m, peut glisser sans frottement. A $t = 0$, l'anneau part de M_0 ($OM_0 = a$, $\theta_0 = 0$), sans vitesse initiale par rapport à la tige.
1 Déterminer la trajectoire de l'anneau en coordonnées polaires par rapport au repère xOy.
2. Déterminer la réaction de la tige sur l'anneau en fonction de a, ω, θ et g.

Exercice 15. Disparition d'une liaison (d'après concours).
Un plateau horizontal est animé d'un mouvement sinusoïdal vertical $z = a\cos\omega t$.
Un cube, assimilé à un point matériel est posé sur le plateau.
Trouver une condition sur la fréquence pour que le cube ne quitte jamais le plateau.

Exercice 16. Ralentissement d'un navire.
Un navire de masse $M = 10^7\,kg$ progressant sur l'eau à une vitesse v de l'ordre de 10 à $20\,km/h$ subit une force de freinage qui est fonction de la vitesse selon une loi du type $F = -kv^3$.
1. Sachant que le moteur reçoit une puissance $\mathcal{P} = 5\,MW$ et possède un rendement η de 80%, calculer k lorsque la vitesse limite atteinte vaut $v_L = 19\,km/h$.
2. Quelle est la durée de la phase de ralentissement quand le navire, lancé moteur à l'arrêt, voit sa vitesse passer de $v_1 = 17\,km/h$ à $v_2 = 14\,km/h$? Quelle distance a-t-il parcouru pendant ce temps ?

Exercice 17. Pendule.
Un point matériel M, de masse m, relié à l'origine O par un fil inextensible et sans masse, décrit dans le sens positif un cercle vertical de centre O et de rayon R.
1. Quelles sont les tensions $\mathbf{T_A}$ et $\mathbf{T_{A'}}$ lorsque M passe en A avec la vitesse $\mathbf{v_A}$ et en A' avec la vitesse $\mathbf{v_{A'}}$? (on exprimera T_A et $T_{A'}$ en fonction de v_A, $v_{A'}$, m, R et g intensité du champ de pesanteur). Les valeurs trouvées sont-elles positives ?
2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ que fait OM avec la verticale. Pour intégrer cette équation, multiplier chaque terme par $\dot{\theta}$ pour faire apparaître des dérivées connues, en déduire l'expression de la vitesse à l'instant t sachant qu'à l'instant initial $\theta = 0$ et $v = v_0$ (on exprimera v^2 en fonction de v_0, g, R et θ). Calculer alors la tension du fil T en fonction de v_0, g, R et θ.
3. La vitesse initiale v_0 étant donnée, on désigne par θ_v la valeur de θ qui annule l'expression de v et par θ_T celle qui annule l'expression de T. Exprimer $\cos\theta_v$ puis $\cos\theta_T$ en fonction de v_0, g et R et tracer les courbes $\cos\theta_v = f(v_0^2)$ et $\cos\theta_T = f(v_0^2)$. En déduire la nature du mouvement de M suivant la valeur de v_0.