Mouvement dans un champ de forces centrales conservatives

Exercice 1. Formules de Binet et équations des trajectoires.

1. En posant $u = \dfrac{1}{r}$, montrer que, pour un mouvement à force centrale, $v^2 = C^2 \left[u^2 + \left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2\right]$ et que $\mathbf{a} = -C^2u^2 \left[\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] \mathbf{e}_r$ où C est la constante des aires et $\mathbf{e}_r$ est le vecteur radial de la base polaire.
2. En appliquant alors le principe fondamental de la dynamique à un point matériel M de masse m soumis à l'attraction gravitationnelle d'un gros astre O de masse M, quelle est l'équation différentielle vérifiée par u ? En déduire l'équation polaire générale des trajectoires (à $t = 0$, $\mathbf{OM} = \mathbf{r}_0$, $\theta = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ et $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) = \alpha$).
3. Préciser en particulier le paramètre de la conique ainsi que son excentricité en fonction des conditions initiales. Exprimer finalement l'énergie mécanique en fonction du paramètre et de l'excentricité.

Exercice 2. Vecteur de Runge-Lenz.

Soit un point matériel M de masse m soumis à l'attraction gravitationnelle d'un gros astre O, fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, et de masse M. Montrer que le vecteur de Runge Lenz défini par $\mathbf{A} = \dfrac{1}{\mathcal{G}mM} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{L}_O(M)) - \mathbf{e}_r$ est un invariant du mouvement, qu'il est porté par l'axe polaire de la trajectoire conique et que sa norme est égale à l'excentricité de la conique. Les vecteurs vitesse et moment cinétique sont évalués par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et le vecteur $\mathbf{e}_r$ est le vecteur radial de la base cylindrique. Il faudra introduire le vecteur $\mathbf{e}_z$ orthogonal au plan de la trajectoire, et le vecteur $\mathbf{e}_\theta$, contenu dans le plan de la trajectoire.

Exercice 3. A propos de Spoutnik.

Le premier satellite artificiel soviétique, Spoutnik I, fut placé sur orbite en 1957. Son apogée était à l'altitude $h_A = 947\,km$ et son périgée était à l'altitude $h_P = 228\,km$. Nous supposerons la Terre sphérique, de rayon $R = 6380\,km$. Déterminer alors le demi-grand axe a de la trajectoire, l'excentricité e de la trajectoire et le paramètre p de la conique. Déterminer aussi la période de révolution T, sachant qu'au niveau de la surface terrestre le champ de pesanteur vaut $g = 9,81\,m.s^{-2}$.

Exercice 4. A propos des comètes (d'après concours).

Dans tout l'exercice, R_0 désigne le rayon de l'orbite supposée circulaire de la Terre autour du Soleil et v_0 désigne la vitesse de la Terre par rapport au référentiel héliocentrique. Pour les applications numériques, nous prendrons $R_0 = 150.10^6\,km$ et $v_0 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_S}{R_0}} = 30\,km.s^{-1}$, où M_S désigne la masse du Soleil.

1. Étude de la comète de Halley
Le périhélie (point le plus proche du Soleil) de la comète de Halley se trouve à la distance $D = 0,6\,R_0$ du centre du Soleil (dont la masse M_S vaut $M_S = 2.10^{30}\,kg$), sa période T est de 76 années terrestres. Justifier alors que la trajectoire de cette comète autour du Soleil est elliptique. Déterminer le demi-grand axe a de cette ellipse. En déduire l'excentricité e de la trajectoire de la comète de Halley.

2. Étude d'une comète parabolique
Une comète C dont la trajectoire est coplanaire à l'orbite terrestre a une masse m. Son périhélie P se trouve à une distance $r_p = R_0/2$ du centre du Soleil et la norme de la vitesse de la comète en ce point P est $v_p = 2v_0$ par rapport au référentiel héliocentrique.
a. Quelle est la nature de la trajectoire de la comète C ?
b. Exprimer la norme de la vitesse $\mathbf{v}$ de la comète par rapport au référentiel héliocentrique quand la comète se trouve à une distance r du centre du Soleil, en fonction de la constante de gravitation $\mathcal{G}$ et de la masse du Soleil M_S.
c. Calculer l'excentricité et le paramètre de la conique décrite par la comète en fonction de R_0. Calculer aussi la distance comète-Soleil pour $\theta = -\pi/2$ (point A) et pour $\theta = \pi/2$ (point B), les angles étant repérés par rapport à l'axe polaire. Les points A et B correspondent aux intersections de la trajectoire de la comète avec la trajectoire de la Terre.
d. Calculer l'angle que fait la tangente en A à la trajectoire de la comète par rapport à la tangente en A à la trajectoire terrestre.
e. Calculer (en jours) le temps passé par la comète à l'intérieur de l'orbite terrestre, temps qui donne un ordre de grandeur de la visibilité à l'oeil nu de la comète depuis la Terre. Donnée

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{4}{3}$$