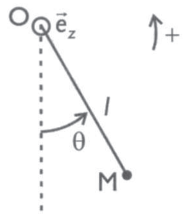
Moment cinétique

Exercice 1. Théorème du moment cinétique appliqué au pendule simple.

Un pendule est constitué d'une masse m accrochée au point M à un fil de masse négligeable et de longueur l. Le fil est repéré par rapport à la verticale par l'angle orienté θ. Le mouvement s'effectue sans frottement.

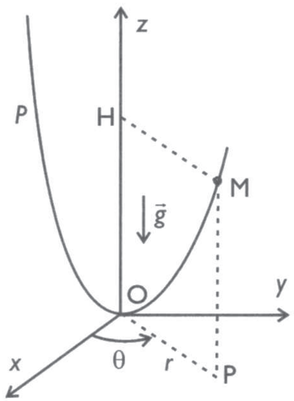


1. Établir l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique. Retrouver cette équation en appliquant le principe fondamental de la dynamique et le théorème de l'énergie cinétique.

2. En considérant des oscillations d'amplitude θ_0, donner la condition sur la tension du fil pour que celui-ci ne casse pas.

Exercice 2. Mouvements d'une particule en contact avec une cuvette paraboloïque (d'après concours).

On désire étudier les mouvements possibles d'un point matériel M, de masse m, sous l'action du champ de pesanteur $\mathbf{g}$, à l'intérieur d'une cavité fixe que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre $\mathcal{R}(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ supposé galiléen. La surface extérieure de cette cavité est un paraboloïde de révolution $\mathcal{P}$, d'axe vertical ascendant Oz, dont l'équation en coordonnées cylindriques (r, θ, z) est $r^2 - az = 0$ avec $a > 0$.
Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel M glisse sans frottement sur $\mathcal{P}$. Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de M, la base de projection étant $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$.



1. Moment cinétique
a. Exprimer, dans la base $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$, la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}$.
b. Quelle est l'expression, dans la base $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$, du moment cinétique $\mathbf{L}_O$ en O, par rapport à $\mathcal{R}$? En déduire sa projection selon l'axe Oz.
c. Montrer que l'action $\mathbf{R}$ qu'exerce $\mathcal{P}$ sur M est contenue dans le plan OHP. En appliquant le théorème du moment cinétique en O, sous forme vectorielle, montrer que la projection de $\mathbf{L}_O$ sur Oz se conserve au cours du temps. Expliciter cette relation de conservation en fonction r de θ. Dans la suite, pour simplifier l'écriture, on désignera par L cette constante.

2. Energie
a. Quelle est, en fonction des coordonnées et de leurs dérivées, l'expression de l'énergie cinétique E_c de la particule M par rapport à $\mathcal{R}$?
b. Justifier l'existence d'une énergie potentielle E_p dont dérivent les forces extérieures agissant sur M. Exprimer E_p en fonction de r en supposant que $E_p(0) = 0$.
c. Que peut-on dire de l'énergie mécanique de M dans le champ de pesanteur ?

3. Discussion générale du mouvement
a. Déduire de ce qui précède une équation du premier ordre, à une seule inconnue, de la forme : $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 G(r) + E_{p,ef}(r) = E_m$ où $G(r)$ est positif et sans dimension et où $E_{p,ef}(r)$ est une énergie potentielle effective. Expliciter $G(r)$ et $E_{p,ef}(r)$.
b. Représenter avec soin le graphe $E_{p,ef}(r)$. Montrer que $E_{p,ef}(r)$ passe par un minimum pour une valeur r_m de r que l'on exprimera en fonction de L, m, a et g, intensité du champ de pesanteur.
c. Discuter, à l'aide du graphe $E_{p,ef}(r)$, la nature du mouvement de M. En déduire que la trajectoire de M sur $\mathcal{P}$ est nécessairement tracée sur une région de $\mathcal{P}$ limitée par deux cercles définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème. On se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer ces deux cercles.

4. Etude de quelques mouvements particuliers
a. A quelle condition sur L la trajectoire de M sur $\mathcal{P}$ est-elle une parabole méridienne ?
b. Déterminer les conditions initiales auxquelles il faut satisfaire pour que la trajectoire de M sur $\mathcal{P}$ soit un cercle horizontal.
c. Une petite perturbation écarte légèrement la coordonnée r de la valeur r_m pour laquelle $E_{p,ef}(r)$ est minimale. Montrer que $\epsilon = r - r_m$ oscille avec une période que l'on calculera dans le cas où $r_m = 1\,m$ et $a = 2\,m$. On rappelle que $g = 9,81\,m.s^{-2}$.

5. L'expérience montre que la bille se stabilise finalement au fond de la cuvette, quelles que soient les conditions initiales du mouvement. Commenter à l'aide du graphe $E_{p,ef}(r)$.