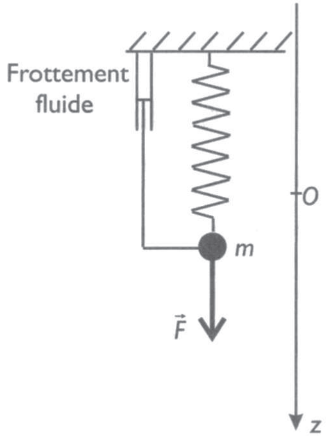
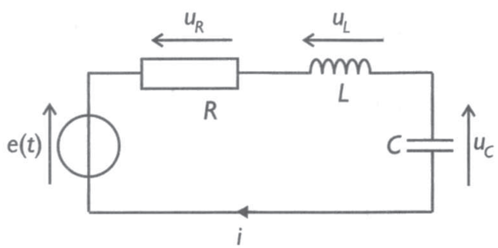
Oscillateur harmonique - Régime sinusoïdal forcé

Exercice 1. Analogies électromécaniques.

On considère les deux dispositifs suivants :
le système mécanique est constitué d'un corps de masse m, accroché à un ressort de raideur k et de longueur naturelle l_0 , soumis à une force de frottement fluide liée à la vitesse par la loi $\mathbf{F}_r = -h\,\mathbf{v}$ et subissant une excitation extérieure modélisée par une force verticale de composante F suivant l'axe vertical Oz. On note z la position de la masse m, l'origine étant choisie à la position d'équilibre pour F nulle ;
le système électrique est un circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale $e(t)$. Des grandeurs sont dites analogues si elles interviennent de façon similaire dans des équations diff. de même type.





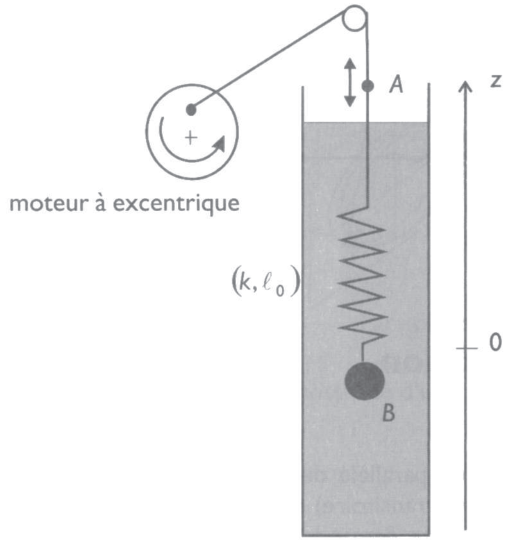
1. Établir les équations différentielles vérifiées d'une part par la charge q du condensateur dans le circuit RLC, et d'autre part par la côte z de la masse m dans le système mécanique. Déterminer les grandeurs électriques analogues à la côte z, à la force F, à la masse m, à la constante de frottement h, à la constante de raideur k du ressort, et à la vitesse v.

2. Réponse indicielle : on suppose que $e(t)$ et $F(t)$ sont constantes pour $t < 0$ et s'annulent à partir de $t = 0$. On observe pour chaque système un régime transitoire pseudo-périodique amorti. Pour les deux systèmes, on mesure un décrément logarithmique identique : $\delta = 0,75$, la pseudo période est $T = 1,4\,ms$ pour le circuit RLC et $T = 1,4\,s$ pour le système mécanique. Sachant que $m = 0,1\,kg$ et $L = 0,01\,H$, en déduire les valeurs de R, C, k et h.

3. En considérant à présent que $e(t)$ et $F(t)$ sont sinusoïdales , peut-on définir une impédance mécanique ? Quelle est son expression ?

Exercice 2. Oscillateur élastique vertical.

Considérons le dispositif schématisé ci-contre. Une boule d'acier B de masse $m = 100\,g$ est fixée à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . La boule est plongée dans un liquide, ce qui entraîne l'existence d'une force de frottement visqueux, de coefficient h. L'autre extrémité du ressort, notée A, est liée à une ficelle entraînée par un moteur à excentrique qui impose un mouvement sinusoïdal de pulsation réglable ω au point A, avec une amplitude a.



1. Donner l'équation du mouvement de la boule B (nous négligeons la poussée d'Archimède sur la boule).
2. Pour quelle fréquence du vibreur aura-t-on la résonance d'amplitude ?
3. A partir des renseignements donnés ci-dessous effectuer le calcul de la fréquence de résonance en amplitude.
   – quand on accroche, dans l'air, la boule B à l'extrémité du ressort, celui-

ci s'étire de $10\,cm$ à l'équilibre. On prendra l'accélération de la pesanteur g égale à $10\,m.s^{-2}$.
– quand on plonge le système dans le liquide, et que l'on enregistre le régime libre, (on comprime le ressort, puis on lâche la boule), on s'aperçoit que le mouvement est pseudo-périodique, et la mesure du décrément logarithmique est de 1,62.

On rappelle que le décrément logarithmique est défini par $\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{z(t)}{z(t+nT)}\right)$ où z(t+nT) est la position de la boule à l'instant $t+nT$ avec T la pseudo-période.

Exercice 3. Oscillations forcées d'une particule sur un cerceau mobile.
Une particule, assimilée à un point matériel M de masse m, se déplace sur la rainure intérieure d'un cerceau de centre O, de rayon R et d'axe horizontal Oz, avec une force de frottement visqueux $\mathbf{f} = -bm\mathbf{v}$, où $\mathbf{v}$ désigne la vitesse relative de la particule par rapport au cerceau, et b un coefficient positif constant. La particule est repérée par l'angle orienté $\theta = (\mathbf{Ox}, \mathbf{OM})$, où Ox désigne la verticale descendante ; on supposera θ petit dans tout le problème. On désignera par g l'accélération de la pesanteur. La particule est abandonnée à l'instant $t = 0$ depuis la position $\theta = \theta_0$.
Le cerceau est animé d'un mouvement oscillatoire de rotation, de faible amplitude autour de son axe Oz :

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$$

où $\varphi = (\mathbf{Ox}, \mathbf{OA})$, OA désignant un rayon fixe du cerceau.
1. Écrire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\theta(t)$.
2. Déterminer l'amplitude θ_M de l'élongation $\theta(t)$ en régime forcé, ainsi que le rayon R_R du cerceau qui permet d'obtenir la résonance d'amplitude.