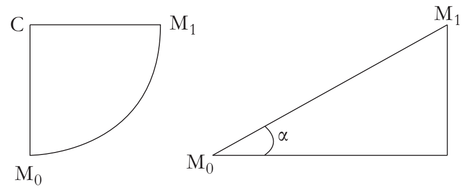
Problèmes à un degré de liberté

Exercice 1. Énergie potentielle.
On considère un champ de forces $\mathbf{F}$ de composantes $F_x = 2xz$, $F_y = yz$ et $F_z = F_z(x, y)$.
1. Déterminer F_z pour que $\mathbf{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on calculera, sachant que la force est nulle en O. On prendra le plan Oxy comme origine des énergies potentielles.
2. Calculer alors, le long de l'hélice d'équations paramétriques $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$ et $z = h\theta$ la circulation de $\mathbf{F}$ de $M_1(\theta = 0)$ à $M_2(\theta = \pi)$.
3. Obtiendrait-on un résultat différent en calculant la circulation le long d'une autre courbe ?

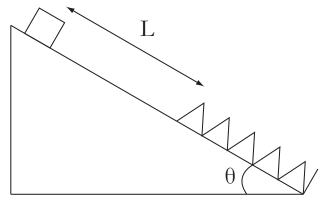
Exercice 2. Molécule diatomique.
L'énergie potentielle correspondant à la force qui s'exerce entre les deux atomes d'une molécule diatomique est correctement donnée par $U(x) = -\dfrac{a}{x^6} + \dfrac{b}{x^{12}}$ où x désigne la distance intermoléculaire et a et b sont des constantes positives.
1. Donner l'expression de la force $\mathbf{f}(x)$ qui s'exerce entre les deux atomes.
2. Les masses des deux atomes sont m et M ($M > m$). En supposant que l'atome de masse M reste au repos en un point O, tandis que l'autre peut se déplacer sur la droite $x'Ox$, trouver les différents mouvements possibles à l'aide du graphe de la fonction $U(x)$. Quelle est la distance d'équilibre x_0 entre les deux noyaux ?
3. Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x_0+\epsilon) = -k\epsilon$ pour $\epsilon \ll x_0$. En déduire la période des petites oscillations de m autour de la position d'équilibre en fonction de m, a et b.

Exercice 3. .
Une bille de masse m est susceptible de glisser :
1. soit sans frottement à l'intérieur d'une portion de jante circulaire, quart de cercle de centre C de rayon R.
2. soit en présence de frottement de *coefficient de glissement dynamique** f constant, sur un plan incliné d'angle α.
Déterminer dans chaque cas la vitesse minimale v_0 qu'il faut communiquer à la bille en M_0 afin qu'elle atteigne le point M_1.

* le coefficient de glissement dynamique est défini par $f = \dfrac{\|\mathbf{R_T}\|}{\|\mathbf{R_N}\|}$ où $\mathbf{R_N}$ et $\mathbf{R_T}$ sont les réactions normale et tangentielle au support.



Exercice 4. .



On abandonne sans vitesse initiale un bloc de masse m à partir du sommet d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Le bloc glisse sans frottement et vient comprimer un ressort de constante de raideur k en bas du plan incliné. Au moment du choc, le ressort est comprimé d'une longueur d avant qu'il ne se détende à nouveau.
1. Calculer k en fonction de m, θ, L et d.
2. Jusqu'à quelle hauteur le bloc remonte-t-il ?

Exercice 5. .
Un point M de masse m est placé à l'instant initial sur le sommet A d'une sphère sur laquelle il glisse sans frottement ; on lui communique une vitesse horizontale v_0. Soit O le centre de la sphère et R son rayon.
1. Déterminer la réaction R_N de la sphère sur M en fonction de l'angle $\varphi = (\mathbf{OA}, \mathbf{OM})$.
2. Quelle est la valeur maximale φ_m de φ ? Quel est le mouvement ultérieur ?

Exercice 6. .
A quelle vitesse v_0 faut-il lancer verticalement un objet de masse m pour qu'il atteigne une altitude z_1 au dessus du sol avec une vitesse nulle dans les deux cas suivants :
1. On suppose $g = g_0$ constant.

2. On suppose que g varie avec l'altitude proportionnellement à $1/r^2$? On notera R le rayon de la Terre.

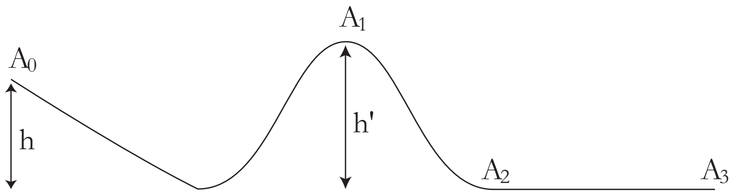
Exercice 7. .

Une particule matérielle M de masse m est déposée au point A_0 à l'altitude h sur un plan incliné.

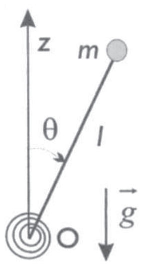
1. La particule parvient-elle au point A_1 d'altitude $h' > h$ en supposant qu'elle glisse sans frottement sur le plan ?

2. Le point matériel est maintenant relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos l_0. Le ressort est comprimé jusqu'à une longueur l puis bloqué, la particule est alors en A_0. On libère le ressort. Le trajet $A_0A_1A_2$ est parfaitement glissant. Déterminer :

- La longueur l du ressort pour que la particule atteigne A_1 avec une vitesse nulle.
- La vitesse de cette particule en A_2.
- La distance d'arrêt $d = A_2A_3$, sachant qu'à partir de A_2 interviennent des frottements solides de coefficient de glissement f (On rappelle que $R_T = fR_N$).



Exercice 8. Pendule de Holweck et Lejay.



On considère une barre homogène de masse négligeable et de longueur l, susceptible de tourner sans frottement autour de l'axe horizontal Ox et soumise en O à l'action d'un ressort spiral. L'énergie potentielle de ce ressort, qui ne dépend que de l'angle θ, est de la forme $E_p(\theta) = \frac{1}{2}C\theta^2$. A l'extrémité A de cette tige est placé un objet quasi-ponctuel de masse m. On étudie l'évolution de ce dispositif dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

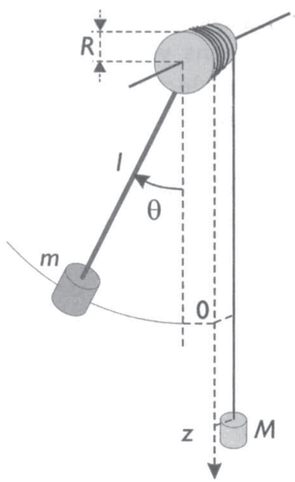
1. Vers quelle position va évoluer la tige dans le cas de très faibles valeurs (puis des très fortes valeurs) de la constante de torsion C ? Une approche qualitative est suffisante à ce stade.

2. Exprimer l'énergie potentielle du système {ressort, masse ponctuelle en A} en fonction de l'angle θ.

3. La position $\theta = 0$ est-elle une position d'équilibre ? Cet équilibre est-il stable ou instable ?

4. Montrer que le mouvement peut-être périodique au voisinage de $\theta = 0$. A quelle condition portant sur C, ceci est-il vérifié ? Exprimer la période T des petites oscillations en fonction de l, g et de $\xi = C/mgl$.

Exercice 9. Pendule asymétrique.



Un objet de masse m est fixé sur une tige, très légère, solidaire d'un cylindre de masse négligeable. Ce cylindre de rayon R peut tourner sans frottements autour d'un axe horizontal. La distance de cet axe au mobile est notée l. Un fil sans masse est enroulé autour du cylindre de telle sorte qu'il ne glisse pas. On fixe à l'extrémité libre du fil un objet de masse M. Lorsque le cylindre tourne d'un angle θ, M se déplace verticalement de z. Les variables θ et z sont des grandeurs algébriques définies sur la figure.

On admet que le système mécanique constitué par l'ensemble des deux masses est conservatif et que son énergie potentielle est la somme des énergies potentielles de pesanteur des deux masses.

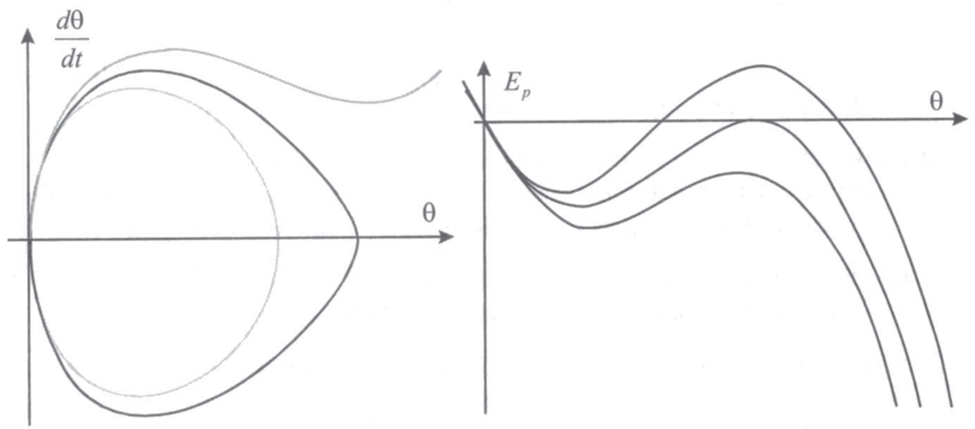
1. Le fil étant inextensible, établir une relation entre R, θ et z si les deux masses sont à la même altitude lorsque $\theta = 0$.

2. En déduire l'expression de l'énergie cinétique E_c du système constitué des deux masses en fonction de m, M, R, l et de $\dfrac{d\theta}{dt}$. Montrer que l'énergie potentielle E_p peut s'exprimer en fonction de la seule variable de position angulaire θ.

3. Si la masse M dépasse une valeur minimale M_0, on constate qu'il n'existe plus de position d'équilibre. Donner l'expression de cette valeur $M_0 = f(m, l, R)$.

4. Dans la suite, la masse M est inférieure à M_0. Montrer qu'il existe deux positions d'équilibre θ_{e_1} et θ_{e_2} telle que $\theta_{e_2} = \pi - \theta_{e_1}$. Interpréter géométriquement ce résultat. Discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre en notant θ_{e_1} la

position d'équilibre stable.
5. Au voisinage de ces positions d'équilibre, on peut approximer $E_p(\theta)$ par $E_p(\theta) \simeq E_0 + C(\theta - \theta_e)^2$. Justifier cette approximation parabolique, expliciter l'expression de la constante C et donner son signe pour $\theta_e = \theta_{e_1}$ et $\theta_e = \theta_{e_2}$.
6. Établir l'équation du mouvement, en supposant que la position angulaire initiale θ_0 est voisine de θ_{e_1} puis de θ_{e_2}. Justifier à nouveau le caractère stable ou instable de ces positions d'équilibre.
7. Le système est placé dans la position $\theta = 0$. Les masses sont lâchées sans vitesse initiale à la date $t = 0$. La figure représente des trajectoires de phase pour $l = 50\,cm$, $R = 5\,cm$, $m = 100\,g$ et pour trois valeurs différentes de la masse M, à savoir $M = 650\,g$, $720\,g$ et $800\,g$. Associer, à chaque valeur de M, la trajectoire de phase correspondante et précisez son sens de parcours. Justifier votre choix en vous appuyant sur le graphe de $E_p(\theta)$. Comment choisir le masse M pour obtenir une trajectoire de phase fermée en partant de ces conditions initiales ?



Exercice 10. Masse fixée à deux ressorts verticaux.
Une masse m de forme sphérique est fixée à deux ressorts verticaux, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, dont les points de fixation sont espacés d'une distance égale à $2L$. Ce mobile est astreint à des déplacements verticaux repérés par son altitude z. Dans un premier temps, on néglige tout frottement.
Étude énergétique
1. Déterminer l'expression des différentes énergies potentielles en jeu dans ce système en fonction de z. Préciser les états de référence choisis.
2. Rechercher la position d'équilibre du mobile.
3. Établir l'équation différentielle en z.
4. A l'instant initial, on lâche le mobile à partir de la position $z_0 = L/2$. Déterminer l'expression de z(t).
5. La période du mouvement est-elle modifiée si on part de la position initiale $z'_0 = L/4$?
Étude directe de l'équation du mouvement
6. Donner l'expression des forces s'exerçant sur le mobile en fonction de z et des autres grandeurs de l'énoncé. Retrouver la condition d'équilibre de la question 2.
7. Établir l'équation différentielle vérifiée par z(t).
Prise en compte de l'amortissement
8. On place maintenant le dispositif dans un fluide visqueux de coefficient de viscosité η, qui exerce une force de freinage du type $\mathbf{F} = -6\pi\eta r\mathbf{v}$. Comment est modifiée l'équation différentielle ? La position d'équilibre a-t-elle changée ?
9. La période des oscillations dans l'air (où le frottement peut-être négligé) est T_0 et la pseudo-période dans un liquide est T. Établir l'expression de la viscosité η du liquide en fonction de T_0, T et des caractéristiques de la sphère.

Exercice 11. Petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre.
On considère un élastique E de raideur k et de longueur au repos l_0, ainsi qu'un point matériel M de masse m.
1. M étant accroché à E, déterminer l'allongement a de E, ainsi que la pulsation ω_0 des oscillations verticales de M autour de sa position d'équilibre.
2. On réalise un quart de circonférence de centre O et de rayon a. E, accroché en A, passe en B dans un petit anneau. $AB = l_0$. M coulisse sans frottement sur le cercle (voir figure). Écrire l'équation différentielle du mouvement de M. Calculer θ_1, valeur de θ pour laquelle M est en équilibre. Discuter la stabilité de l'équilibre.