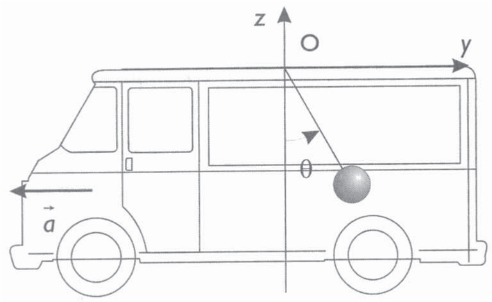
Dynamique en référentiel non galiéen

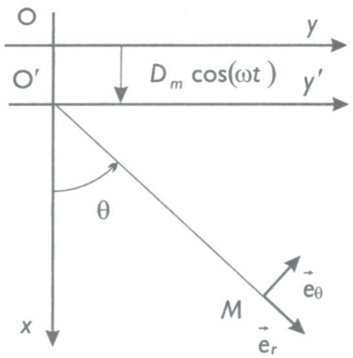
Exercice 1. Pendule dans un camion.

Un camion est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré, **a** par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. Une masse m est fixée à l'extrémité d'un fil de longueur l.
La position du pendule est repéré par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. Les frottements sont négligés. Déterminer la position d'équilibre du pendule et la période des oscillations autour de cette position d'équilibre.

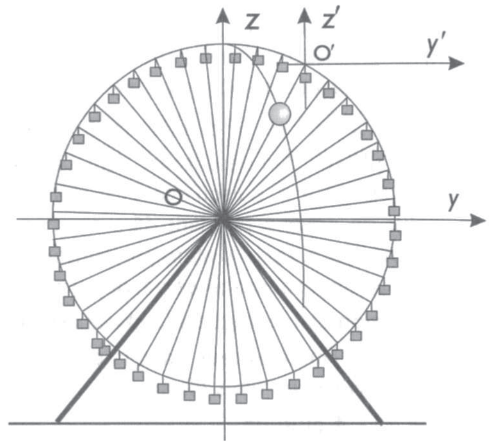


Exercice 2. Pendule paramétrique (d'après concours).

Un pendule simple est constitué d'une masse m, placée à l'extrémité d'un fil inextensible, de longueur l et de masse négligeable. L'autre extrémité du fil est fixée en O' qui oscille sinusoïdalement suivant la verticale, avec une amplitude D_m et une pulsation ω : $\mathbf{OO'} = D_m \cos(\omega t)\mathbf{e}_x$. θ représente l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante.
1. On suppose qu'il n'y a pas de frottement. On note $\mathcal{R}(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, le référentiel terrestre supposé galiléen et $\mathcal{R}'(O', \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ le référentiel lié au support du pendule. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ?
2. En utilisant le théorème du moment cinétique en O', écrire l'équation du mouvement dans $\mathcal{R}'$.
3. Montrer que l'équation peut s'écrire $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2(1 + h(t))\sin\theta = 0$. Préciser ω_0 et $h(t)$ en fonction des données de l'énoncé.

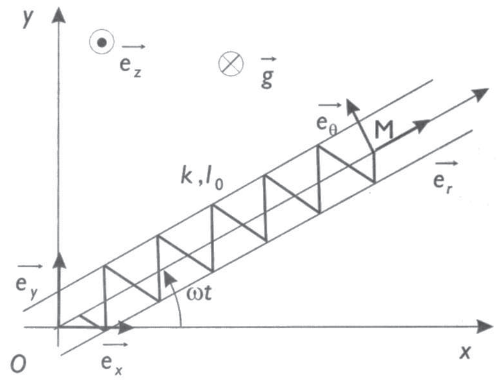


Exercice 3. Mouvement dans une grande roue.



Dans un parc d'attraction, un enfant fait un tour de manège dans la grande roue. La roue de rayon R tourne à vitesse angulaire ω constante. A l'instant $t = 0$ où la nacelle de dimension négligeable atteint sa hauteur maximale, l'enfant lâche accidentellement une balle de masse m. Les frottements sont négligeables. On note $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, un repère fixe associé au référentiel terrestre assimilé à un référentiel galiléen et $(O', \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ un repère fixe associé au référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la nacelle.
1. Étudier le mouvement de la balle vue par sa mère assise sur un banc, considérée comme un observateur fixe dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ associée à la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ avec la direction Ox perpendiculaire à la roue. Quelle est la trajectoire de la balle ?
2. Étudier le mouvement de la balle vue par l'enfant, considéré comme un observateur fixe pour le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à une nacelle, soit à partir de la relation fondamentale dans le référentiel $\mathcal{R}'$, soit à partir d'une transformation cinématique.

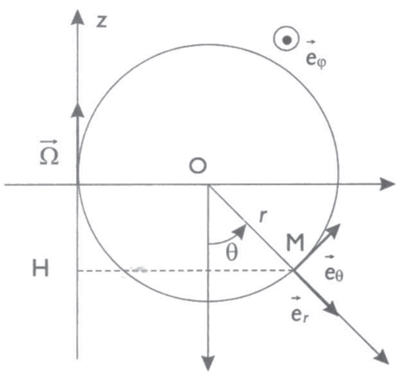
Exercice 4. Étude dans un référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe (d'après concours).
Le mouvement est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe Oz fixe, de vecteur rotation $\mathbf{\Omega} = \omega\,\mathbf{e}_z$, et associé au repère $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$.
On considère une particule M de masse m pouvant se mouvoir sans frottement le long de l'axe $(O, \mathbf{e}_r)$. Le champ de pesanteur est toujours suivant la verticale Oz : $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{e}_z$.
La masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide l_0, de raideur k, dont l'autre extrémité est fixée en O. La position de M est repérée dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ par $\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r$. Le champ de pesanteur est perpendiculaire au plan de la figure.



1 . Préciser les expressions vectorielles des forces d'inertie dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$.
2. Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle E_p^{ie} que l'on précisera.
3. En est-il de même pour la force d'inertie de Coriolis (ou complémentaire) ?
4. Déterminer l'énergie potentielle totale. Tracer l'allure de $E_p(r)$. On distinguera les trois cas possibles selon la valeur de ω.
5. Déterminer la longueur l correspondant à la position d'équilibre dans le référentiel. A quelle condition sur la vitesse angulaire ω l'équilibre est-il possible ? Cet équilibre est-il stable ? Quel est alors le mouvement dans le référentiel du laboratoire ?

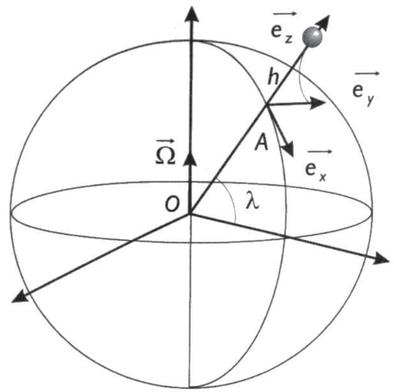
Exercice 5. Anneau sur un cerceau.

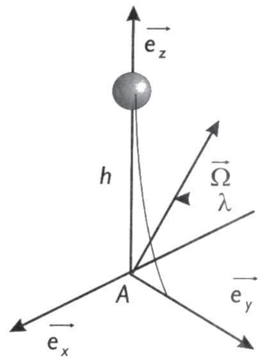
Un cerceau de centre O et de rayon r situé dans le plan vertical tourne autour d'une de ses tangentes verticales d'un mouvement uniforme défini par sa vitesse angulaire $\mathbf{\Omega} = \omega \mathbf{e}_z$. Un anneau de masse m assimilable à un point matériel est mobile sans frottement sur cette circonférence. On désigne par θ, l'angle que fait **OM** avec la verticale descendante passant par O.
On travaillera dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ où $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_\theta$ est perpendiculaire au plan du dessin (voir schéma).



1. Établir l'équation du mouvement $r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta + r\omega^2(1+\sin\theta)\cos\theta$:
1.1. à partir de la relation fondamentale de la dynamique.
1.2. à partir de la conservation de l'énergie.
1.3. à partir du théorème du moment cinétique.
2. En déduire la position d'équilibre. Interpréter le résultat.

Exercice 6. Déviation vers l'Est.
Une masse m est lâchée d'une hauteur h, au-dessus du sol dans le référentiel terrestre supposé non galiléen. La résistance de l'air est négligée. Soit $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ la base orthonormée associée au référentiel terrestre. La direction Az est la verticale ascendante, Ax est suivant un méridien et Ay est suivant un parallèle. La Terre est assimilée à une sphère homogène en rotation uniforme autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ de module ω.





1. Exprimer $\mathbf{\Omega}$ dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ en fonction de la latitude λ.
2. Écrire la relation fondamentale sous forme vectorielle dans le référentiel terrestre non galiléen en fonction du poids et de la force d'inertie de Coriolis.
3. Dans la suite, la verticale A_z est confondue avec la direction du poids. Projeter la relation fondamentale dans le repère $(A, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.
4 Simplifier le système d'équations obtenues en tenant compte du fait que le déplacement suivant x et y reste faible par rapport à celui de z. On négligera les termes en $\dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{dy}{dt}$ dans l'expression de la force de Coriolis.
5. En déduire sous ces hypothèses des expressions approchées de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
6. Évaluer y au moment où la masse m tombe sur le sol. Faire l'application numérique pour $h = 100\,m$ et $\lambda = 45^\circ$. Le résultat dépend-il de l'hémisphère d'étude ? Observe-t-on une déviation vers le sud ?